DS 1, WS 04/05

Kap. 0 :
Allgemeine Vorbemerkungen

Wiederholung : Schulmathematik
HM 1, 2

TGI, Info 1, 2
(Broy, Goos: Band 1)

0.1 Grundbegriffe

Logik, Mengen,

Relationen, Ordnungen

Abbildungen / Funktionen

(Jeweils: Basisobjekte / Operationen /
erzeugte Objekte ...)

Beispiel: Element , Menge, Teilmenge

Vereinigung, Potenzmenge,

kartesisches Produkt , Relation,

Verknüpfung von Relationen

0.2 Einfache algebraische Strukturen

- boolesche Algebren
- Monoide natürlicher Zahlen
- Ring der ganzen Zahlen
- Körper der rationalen Zahlen
- Körper der reellen Zahlen
- Zahlenrechnung mod m
- Polynome, Matrizen
- Rechnen mit Ungleichungen
  (angeordnete Strukturen)

0.3 Beweismethoden

- Indirekte Beweise (s.u.)
- vollständige Induktion (s.u.)
- strukturelle Induktion (später)

Indirekte Beweise

Verschiedene Varianten

(1) Zu beweisen sei die Aussage A .

Zum Beweis wird $\neg A$ angenommen.

Daraus wird ein Widerspruch

(offensichtlich falsche Aussage,

Widerspruch zu schon Bekanntem

oder die Aussage A) hergeleitet :

Man beweist also
$(\neg A \Rightarrow \text{false}) \equiv \text{true}$ oder
$(\neg A \Rightarrow A) \equiv \text{true}$.

Das gilt nur , wenn $\neg A \equiv \text{false}$, d.h.
wenn $A \equiv \text{true}$.

<u>Beispiel</u> (Euklid, 300 v. Chr., Alexandria):

$A \equiv$ "Es gibt unendlich viele Primzahlen"

(2) *Zu beweisen sei $A \Rightarrow B$.*

Zum Beweis wird $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt.

Denn $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg A \vee \neg\neg B \equiv$

$\equiv \neg(\neg B) \vee \neg A \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.

(3) *Zu beweisen sei $A \Rightarrow B$.*

Dazu wird ein Widerspruchsbeweis so geführt:

Annahme $\neg(A \Rightarrow B) \equiv$

$\equiv \neg (\neg A \vee B) \equiv (A \wedge \neg B)$

Dann wird ein Widerspruch
zu A oder zu $\neg B$ hergeleitet.

oder ein sonstiger Widerspruch (eine Aussage C und ihr Gegenteil $\neg C$).

<u>Beispiel</u> : Indirekter Beweis von:

"Die Länge d der Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1 ist keine rationale Zahl."

Notation:

- **d sei die Länge der Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge s**
- **A sei die Aussage "s = 1"**
- **B sei die Aussage "d ist irrational"**

Dann lautet die Behauptung: $A \Rightarrow B$.

<u>Indirekter Beweis</u>: Annahme:
Es gelte $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

$\neg B$ ist die Aussage:
"d ist eine rationale Zahl",

> **d.h. es gibt natürliche Zahlen a und b, die teilerfremd sind,**
> **(d.h. keine natürliche Zahl ist Teiler von a und von b, d.h. ggT(a,b) = 1)**
> **<u>und</u> es gilt: $d = a/b$.**

Nach dem Satz von Pythagoras besagt A, dass $2 = 1 + 1 = d^2$ gilt.

$A \wedge \neg B$ bedeutet also $2 = d^2 = (a/b)^2 = aa/bb$ und $ggT(a,b) = 1$.

Daraus folgt: $2bb = aa$, also gilt a ist durch 2 teilbar, d.h. $a = 2n$, n aus $\mathbb{N}$.

Also gilt $2bb = 2n2n$, d.h. $bb = 2nn$. Dann aber ist auch b durch 2 teilbar.

Und das ist ein Widerspruch zu $ggT(a,b) = 1$, d.h. zu $\neg B$.

Also muß $A \Rightarrow B$ gelten.

<u>Frage</u>: Gilt $A \Rightarrow B$ auch für $s = 2$ oder $s = 3, \ldots$?

Beweise mit vollständiger Induktion

Basisversion

Zu beweisen sei – für festes $k \in \mathbb{N}_0$:

„ Für jede natürliche Zahl $n \geq k$
gilt die Aussage $A(n)$.“

Zum Beweis zeigt man:

(1) Es gilt $A(k)$.

(2) Für jedes $n \geq k$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

<u>Begründung</u>: Indirekter Beweis:

Ann.: Es gibt $m \geq k$ mit $\neg A(m)$.

Betrachte die Zahlen $m, m-1, m-2, \ldots, k$.

Das sind endlich viele; also gibt es ein i

mit $m > i \geq k$ und $\neg A(i+1)$ sowie $A(i)$.

Nach (2) gilt aber $A(i+1)$ – Widerspruch!

Beispiel: Behauptung :

Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

Beweis: Sei $U \subseteq \mathbb{N}_0$, $U \neq \emptyset$, $U^{\sim} = \mathbb{N}_0 \setminus U$.

Indirekter Beweis: Annahme:
U hat kein kleinstes Element.

Behauptg: $U^{\sim} = \mathbb{N}_0$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ($n \in U^{\sim}$).

Beweis mit vollständiger Induktion:

(1) $0 \in U^{\sim}$, sonst 0 kleinstes Elem. von U.

(2) Sei $n \geq 0$, $n \in U^{\sim}$.
Wäre $(n+1) \in U$, so gäbe es im Intervall $[0 , n+1]$ ein $m \in \mathbb{N}_0$, das kleinstes Element von U wäre. Deshalb gilt $n+1 \in U^{\sim}$.

Also gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ($n \in U^{\sim}$), d. h. $U = \emptyset$ - im Widerspruch zur Annahme $U \neq \emptyset$.

Bem.: Vollst. Ind. ist äquivalent zu , der sog. Wohlordnungseigenschaft von $\mathbb{N}$.

Verallgemeinerte vollständige Induktion

Zu beweisen sei – für festes $k \in \mathbb{N}_0$:

„ Für jede natürliche Zahl $n \geq k$
gilt die Aussage $A(n)$.“

Zum Beweis zeigt man:

(1) Es gilt $A(k)$.

(2) Für jedes $n \geq k$ gilt: $A(n)$ gilt, wenn

$A(i)$ für alle i mit $k \leq i < n$ gilt.

<u>Begründung</u>: Indirekter Beweis.

Annahme: $A(n)$ gilt nicht für alle $n \geq k$.

Dann hat die Menge der natürl. Zahlen i mit $\neg A(i)$ nach ein kleinstes Element p.

Für alle m mit $k \leq m < p$ gilt dann $A(m)$.

Nach (2) gilt dann $A(p)$ - Widerspruch!

Beispiel: Beweis für die Aussage

" Für jede endliche Menge S und jede

Abbildung $f: S \to S$ von S in S gilt:

Es gibt eine natürliche Zahl q mit

$f^q(S) = f(f^q(S))$. "

Beweis:

Indirekt mit Wohlordnungseigenschaft (🍎):

(1) Wenn f bijektiv, dann $q = 1$.

(2) Sei f nicht bijektiv, d.h. $f(S) \subset S$.

Annahme: Alle $f^n(S)$ sind verschieden.

Betrachte die Menge der nat. Zahlen
$| f^n(S) |$.

Sie hat nach 🍎 ein kleinstes Element
$| f^q(S) |$.

Für dies q gilt die Behauptung.

Ergänzung zu Beweismethoden

Der Rückschluss

Eine Methode zum Finden eines Beweises.

(1) Man forme die zu beweisende Aussage um in die Form

$$V \Rightarrow B$$

(Unter der Voraussetzung V gilt die Behauptung B)

Beispiel:
Es soll bewiesen werden:

"Jede ungerade natürliche Zahl ≠ 1 lässt sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen."

Also ist V die Aussage "u ist eine nat. Zahl ≠ 1"

und B ist die Aussage
" Es gibt zwei natürliche Zahlen x und y so, dass $u = x^2 - y^2$ ".

(2) Wenn V eine recht allgemeine Aussage ist, ist es oft schwer, auf direktem Wege einen Beweis für B zu finden.

Man versucht dann
erstens aus der Annahme, dass B gelte, einfache Bedingungen abzuleiten.

Diese Bedingungen sind notwendige Bedingungen für die Gültigkeit von B.

Wenn man
zweitens Glück hat, kann man zeigen:

- diese Bedingungen folgen allein aus V und

- die Konjunktion K dieser für B notwendigen Bedingungen ist auch hinreichend, d.h. es gilt $K \Rightarrow B$ (Rückschluss).

Damit ist dann ist $V \Rightarrow B$ bewiesen.

Fortsetzung des Beispiels:

$u = x^2 - y^2$ impliziert

$u = (x + y)(x - y)$ mit $x > y > 0$, x,y aus $\mathbb{N}$.

Also sind $t := x+y$ sowie $t' := x-y$ Teiler von u,

ihr Produkt ist u, und es gilt $t > t' > 0$.

Ferner gilt $x = t'+y$, $y = t-x$, also

$x = t'+t-x$, d.h. $2x = t+t'$, also $x = (t+t')/2$,

$y = t-x = 2t/2 - (t+t')/2 = (t-t')/2$.

Daraus folgt, dass t und t' entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen.

Beobachtung:

Man sieht jetzt sofort, dass die Behauptung für eine gerade natürliche Zahl – etwa 4 – nicht gilt,

denn für (t, t') kommen wegen der Teilereigenschaft nur die Zahlenpaare (2,2) oder (4,1) infrage – beide widersprechen aber einigen der obigen Bedingungen.

Für die gerade Zahl 8 gilt 8 = 9-1 (mit t=4).

Für ungerades u kann man offensichtlich stets t = u und t' = 1 wählen:

Dann gilt $x = (u+1)/2$ und $y = (u-1)/2$, und es sind x und y natürliche Zahlen.

Also ist $x^2 - y^2 = (u^2 + 2u + 1 - u^2 + 2u - 1)/4 =$
$4u/4 = u$.

<u>Damit ist die Behauptung B bewiesen</u> (genauer: aus der Voraussetzung V gefolgert).

<u>Bemerkung</u>: Offensichtlich gilt sogar:

Für jede ungerade Primzahl p, gibt es genau eine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen.

Man kann ja nur t = p wählen – das aber immer.

Dagegen hat z. B. 15 zwei Darstellungen:

Für t=5 und t'=3 ist 15 = 16 – 1,

für t=15 und t'=1 ist 15 = 64 – 49.