

---

## Diskrete Strukturen I

---

### Merkblatt zur Lösung linearer Rekursionsgleichungen

Das Merkblatt fasst die für eine konkrete Lösung von linearen Rekursionsgleichungen notwendigen Schritte zusammen und erläutert so den in der Vorlesung im Kapitel „Auflösung von Rekursionsgleichungen“ vorgestellten Hauptsatz zur Lösung homogener linearer Rekursionsgleichungen. Die nachfolgende Lösung von inhomogenen Rekursionsgleichungen ist an eine Methode von Cauchy bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen angelehnt. Konkrete Anwendungsbeispiele finden Sie in den Übungsblättern 9 und 10.

Die Lösungstheorie homogener linearer Rekursionsgleichungen ist im wesentlichen gleich mit der Lösungstheorie homogener linearer Differentialgleichungen. Alle diese Theorien tragen die Merkmale der Theorie linearer Operatoren. Zentraler Begriff ist der Eigenwert als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Die Lösungen lassen sich als Linearkombination von Elementen eines Fundamentalsystems von Eigen- bzw. Hauptvektoren darstellen. Anfangsbedingungen werden erfüllt durch geeignete Wahl von Linearfaktoren des Lösungsfundamentalsystems. Dazu wird ein lineares Gleichungssystem für diese Koeffizienten angesetzt und gelöst.

Auch die erzeugende Funktion  $A(z)$  der Lösungen von homogenen linearen Rekursionen ist in dem o.g. Hauptsatz der Vorlesung vollständig als geschlossener Ausdruck angegeben, und zwar als rationaler Ausdruck bzw. Funktion  $\frac{p(z)}{q(z)}$ . Dabei ist  $q(z)$  das reflektierte Polynom des charakteristischen Polynoms, während sich  $p(z)$  sofort aus dem Ansatz der vollständigen Rekursion ergibt.

Wir halten fest, dass die praktische Lösung homogener linearer Rekursionen keine Verwendung von erzeugenden Funktionen erfordert. Die Angabe einer Lösung und die Angabe eines geschlossenen Ausdrucks ihrer erzeugenden Funktion sind vollkommen entkoppelte Schritte, denen allerdings die Aufstellung des charakteristischen Polynoms gemeinsam ist.

Dagegen werden zur Lösung inhomogener linearer Rekursionen regelmässig erzeugende Funktionen verwendet. Den interessierten Hörern wird auch nicht entgangen sein, dass sich der Beweis des Hauptsatzes sehr wesentlich auf erzeugende Funktionen stützt.

### Vorgehensweise bei der Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen, linearen Rekursionsgleichung  $k$ -ter Ordnung für Folgen  $a_n$

$$a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \dots + q_k \cdot a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \quad (1)$$

mit konstanten Koeffizienten  $q_i$ .

#### Allgemeine Lösung

Zur Lösung der Gleichung (1) stellen wir das charakteristische Polynom  $q(z)$  auf und bestimmen dessen Nullstellen.

$$q(z) = z^k + q_1 z^{k-1} + q_2 z^{k-2} + \dots + q_k. \quad (2)$$

Die (i.a. komplexen) Nullstellen von  $q(z)$  seien  $\alpha_i$  mit Vielfachheit  $k_i$  für  $i = 1, 2, \dots, l$  und  $\sum_{i=1}^l k_i = k$ . Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also  $l$ . Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen, so zählt man  $k$  Nullstellen.

Wir können sofort die allgemeine Lösung  $h_n$  der Rekursion (1) angeben und verwenden dazu als Koeffizienten die Parameter  $c_{i,j}$  für  $i = 1, 2, \dots, l$  und  $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$ . Es gilt

$$h_n = \sum_{i=1}^l p_i(n) \cdot \alpha_i^n \quad \forall n \geq 0 \quad (3)$$

mit

$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} \cdot n^j = c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \dots + c_{i,k_i-1} \cdot n^{k_i-1}. \quad (4)$$

### Spezielle Lösung

Spezielle Lösungen werden angegeben zur Erfüllung von Nebenbedingungen. Die allgemeine homogene Lösung  $h_n$  enthält  $k$  Parameter  $c_{i,j}$  (siehe Formeln (3) und (4)). Nebenbedingungen

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_{k-1} = b_{k-1} \quad (5)$$

für Werte  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$  erfüllt man durch Lösen der  $k$  (in den  $c_{i,j}$  linearen) Gleichungen

$$h_0 = b_0, \quad h_1 = b_1, \quad \dots, \quad h_{k-1} = b_{k-1}. \quad (6)$$

Die spezielle homogene Lösung  $h_n$ , die die Gleichungen (6) erfüllt, bezeichnen wir mit  $\bar{h}_n$ . Die spezielle Lösung der Rekursion (1) mit den Nebenbedingungen (5) ergibt sich dann zu

$$a_n = \bar{h}_n \quad \forall n \geq 0.$$

### Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die erzeugende Funktion  $A(z)$  der speziellen Lösung  $a_n$  ist gleich der rationalen Funktion

$$A(z) = \frac{p(z)}{q^R(z)} \quad (7)$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (2) reflektierten Polynom

$$q^R(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_k z^k \quad (8)$$

und einem Polynom  $p(z)$ , das sich wie folgt aus dem Ansatz der vollständigen Rekursion ergibt. Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt die Gleichung (1) zusammen mit den Nebenbedingungen (5) und ist wie folgt definiert.

$$a_n + q_1 \cdot a_{n-1} + \dots + q_k \cdot a_{n-k} = d_0 \cdot \delta_{n,0} + d_1 \cdot \delta_{n,1} + \dots + d_{k-1} \cdot \delta_{n,k-1} \quad \forall n \geq 0. \quad (9)$$

Dabei setzen wir  $a_n = 0$  für alle  $n < 0$ . (Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion  $\delta_{i,j}$ .) Die Parameter  $d_i$  sind mit Hilfe der Nebenbedingungen (5) durch folgende Gleichungen zu berechnen.

$$a_n + q_1 \cdot a_{n-1} + \dots + q_k \cdot a_{n-k} = d_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, k-1. \quad (10)$$

Das gesuchte Polynom  $p(z)$  ist nun gegeben durch

$$p(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_{k-1} z^{k-1}. \quad (11)$$

## Vorgehensweise zur Lösung einer inhomogenen Rekursion

Wir gehen aus von einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung  $k$ -ter Ordnung für Folgen  $a_n$

$$a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \dots + q_k \cdot a_n = s_n \quad \forall n \geq 0 \quad (12)$$

mit konstanten Koeffizienten  $q_i$  und inhomogenem Anteil (Störglied)  $s_n$ .

### Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung erfolgt in 2 Schritten.

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung  $h_n$  der zugeordneten homogenen Gleichung (i.e. die gegebene Gleichung (12), allerdings mit  $s_n = 0$  als rechter Seite).
2. Bestimmung einer partikulären Lösung  $p_n$  der inhomogenen Gleichung (12) mit den speziellen Nebenbedingungen  $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{k-1} = 0$ .

Die allgemeine Lösung  $a_n$  der inhomogenen Rekursionsgleichung (12) ergibt sich dann zu

$$a_n = h_n + p_n \quad \forall n \geq 0.$$

Zum ersten Schritt wurde bereits alles Wesentliche gesagt. Wir betrachten nun die Konstruktion einer partikulären Lösung.

Sei  $q^R(z)$  das zum charakteristischen Polynom  $q(z)$  reflektierte Polynom einer linearen Rekursion (1), d. h.

$$q^R(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_k z^k.$$

Die partikuläre Lösung  $p_n$  von (12) mit annullierenden Anfangsbedingungen  $p_0 = 0, p_1 = 0, \dots, p_{k-1} = 0$  ist stets gegeben durch deren erzeugende Funktion  $P(z)$  mit

$$P(z) = \frac{z^k \cdot \sum_{n \geq 0} s_n z^n}{q^R(z)}.$$

Falls nun  $s_n$  eine rationale erzeugende Funktion besitzt, kann man durch Partialbruchzerlegung von  $P(z)$  geschlossene Formeln der partikulären Lösung  $p_n$  berechnen. Man benötigt dazu die Zerlegung der Nennerfunktion  $q^R(z)$  in Linearfaktoren. Diese Linearfaktoren ergeben sich aber unmittelbar aus den Nullstellen  $\alpha_i$  des charakteristischen Polynoms  $q(z)$ . Es gilt

$$q^R(z) = (1 - \alpha_1 z)^{k_1} (1 - \alpha_2 z)^{k_2} \dots (1 - \alpha_l z)^{k_l}. \quad (13)$$

### Spezielle Lösung

Die allgemeine homogene Lösung  $h_n$  enthält  $k$  Parameter  $c_{i,j}$ . Nebenbedingungen

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1} \quad (14)$$

für Werte  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$  erfüllt man durch Lösen der  $k$  (in den  $c_{i,j}$  linearen) Gleichungen

$$h_0 = b_0, h_1 = b_1, \dots, h_{k-1} = b_{k-1}. \quad (15)$$

Die spezielle homogene Lösung  $h_n$ , die die Gleichungen (15) erfüllt, bezeichnen wir mit  $\bar{h}_n$ . Die spezielle Lösung der Rekursion (12) mit den Nebenbedingungen (14) ergibt sich dann zu

$$a_n = \bar{h}_n + p_n \quad \forall n \geq 0.$$