
Algorithmische Algebra I

Abgabe: 20. April, in der Vorlesung, MI00.04.011

Aufgabe 1

Seien $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, b - qa)$ gilt.

Aufgabe 2

Eine lineare diophantische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax + by = c \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wobei Lösungen (x, y) in \mathbb{Z}^2 gesucht werden. In dieser Aufgabe soll das Lösungsverhalten solcher Gleichungen untersucht werden. Wir betrachten dazu nur den nicht-trivialen Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

- (a) Zeigen Sie: Genau dann besitzt (1) eine Lösung in \mathbb{Z}^2 , wenn c von $\text{ggT}(a, b)$ geteilt wird. Bestimmen Sie in diesem Fall explizit eine Lösung.
- (b) Es bezeichne \mathcal{L} die Menge aller Lösungen von (1) in \mathbb{Z}^2 . Zeigen Sie: Ist $\mathcal{L} \neq \emptyset$, so gilt

$$\mathcal{L} = \{(x_0 + u, y_0 + v) : (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 0\},$$

wobei $(x_0, y_0) \in \mathcal{L}$ beliebig gewählt ist.

- (c) Sei $\mathcal{L}_0 = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 0\}$ und es gelte $\text{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}_0 = \{(-bk, ak) : k \in \mathbb{Z}\}$$

- (d) Bestimmen Sie explizit alle Lösungen in \mathbb{Z}^2 folgender diophantischer Gleichung:

$$46731958119492x + 6395818000110816y = 1481481468.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Maple!)