Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 10
21. Juni 2005

Algorithmische Algebra I

(Abgabe: Mittwoch, 29.6.05, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Gegeben seien Polynome $f = xy - 1,\ g = x^2 + y^2 - 4$ in $k[x, y]$. Wir betrachten sie als Polynome in x über dem Körper $k(y)$.

(i) Bestimmen Sie Polynome $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ in $k(y)[x]$ mit $\deg(\tilde{F}) < \deg(f)$, $\deg(\tilde{G}) < \deg(g)$ und $\tilde{G}f + \tilde{F}g = 1$.

(ii) Berechnen Sie aus (i) $\operatorname{res}(f, g; x)$, sowie Polynome $F, G \in k[x, y]$ mit $Gf + Fg = \operatorname{res}(f, g; x)$.

Aufgabe 2

Sei $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$ ein Polynom, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die formale Ableitung f' von f ist definiert durch $f' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \in K[x]$, falls $n > 0$, und $f' = 0$, sonst. Zeigen Sie für $a \in K$ und $f, g \in K[x]$:

$$\begin{aligned}(af)' &= af',\\ (f+g)' &= f' + g',\\ (fg)' &= f'g + fg'.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $f \in K[x]$, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\deg(f) > 0$, und $f = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$ sei die Zerlegung in irreduzible Faktoren $e_i \geq 1$, $r \geq 1$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $f' = f_1^{e_1-1} \cdots f_r^{e_r-1}h$, wobei $h \in K[x]$ ein Polynom ist, welches durch kein f_i, $1 \leq i \leq r$, teilbar ist.

(ii) Es gilt $\operatorname{ggT}(f, f') = f_1^{e_1-1} \cdots f_r^{e_r-1}$.

Aufgabe 4

Sei $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in K[x]$, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a_0 \neq 0$, $n > 1$. Die Diskriminante von f ist definiert durch

$$\operatorname{disc}(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_0}\operatorname{res}(f, f') \in K.$$

(i) $\operatorname{disc}(f) = 0 \iff$ es existiert ein $h \in K[x]$, $\deg(h) > 0$, mit $h^2 \mid f$.

(ii) f hat in $\mathbb{C}$ eine mehrfache Nullstelle $\iff \operatorname{disc}(f) = 0$.