

---

## Algorithmische Algebra I

---

(Abgabe: Mittwoch, 6.7.2005, in der Vorlesung)

### Aufgabe 1

- (a) Programmieren Sie in CoCoA eine Funktion `ElimVar(I:IDEAL, V:POLY)`, die für das Ideal  $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$  und die Variable  $V \in \{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis des Eliminationsideals  $I \cap k[\{x_1, \dots, x_n\} \setminus V]$  ausgibt.
- (b) Benutzen Sie `ElimVar`, um eine Funktion `IdealIntersect(I:IDEAL, J:IDEAL)` zu implementieren, die den Durchschnitt der Ideale  $I$  und  $J$  berechnet.

### Aufgabe 2

Seien  $f_i, g_i$  Polynome in  $t$  und sei  $\text{ggT}(f_i(t), g_i(t)) = 1$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Sei  $h$  die Abbildung

$$h : \mathbb{C} \setminus V(\prod g_i(t)) \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t \longmapsto \left( \frac{f_1(t)}{g_1(t)}, \dots, \frac{f_n(t)}{g_n(t)} \right)$$

und

$$I := (f_1(t) - x_1 g_1(t), \dots, f_n(t) - x_n g_n(t)) \subseteq k[t, x_1, \dots, x_n].$$

Zeigen Sie, dass  $\overline{\text{im } h} = V(I_x)$  gilt, wobei  $I_x = I \cap k[x_1, \dots, x_n]$ .

### Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge

$$V := \left\{ \left( \frac{t^3 - t + 2}{t + 1}, t(t^2 - 1) \right) \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \right\} \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Bestimmen Sie das Verschwindungsideal von  $V$ .

### Aufgabe 4

Sei  $C$  die durch das folgende System definierte algebraische Menge in  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{aligned} y^3 - z^2 &= 0 & xz - y^2 &= 0 \\ xy - z &= 0 & x^2 - y &= 0. \end{aligned}$$

Finden Sie Polynome  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  und  $p_3(t)$ , sodass das Bild der Abbildung

$$\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ t \longmapsto (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$$

in  $C$  liegt. Vergleichen Sie  $\text{im}(\rho)$  und  $C$ .