Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 5
11. Mai 2005

Algorithmische Algebra I

(Abgabe: Mittwoch, 18. Mai, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $I = (\mathcal{M}) \subseteq R := k[X_1, ..., X_n]$ ein durch die Menge $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_r\}$ von Monomen erzeugtes Ideal.

(a) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{Min}(\mathcal{M})$ und implementieren Sie ihn in CoCoA.

(b) Bestimmen Sie eine k-Vektorraum Basis von R/I, d.h. finden Sie linear unabhängige $a_1, a_2, \ldots \in R/I$ (möglicherweise unendlich viele), sodass sich jedes Element $f \in R/I$ als eine k-Linearkombination von a_i's darstellen lässt.

Aufgabe 2

Seien I und J Monomialideale in $k[X_1, ..., X_n]$. Zeigen Sie, dass $I + J$ und $I \cap J$ wieder durch $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ erzeugte Monomialideale sind und geben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung von $\mathrm{Min}(\mathcal{M}_1)$ und $\mathrm{Min}(\mathcal{M}_2)$ an.

Aufgabe 3

Der Divisionsalgorithmus liefert für Polynome $f, g_1, \ldots, g_s \in k[X_1, ..., X_n]$ die Koeffizienten $q_1, \ldots, q_s$ und den Rest r, sodass

$$f = q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r. \tag{1}$$

Seien $\mathrm{LM}(g_i) = X^{\alpha(i)}$ und

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \alpha(1) + \mathbb{N}^n \\
\Delta_2 &:= (\alpha(2) + \mathbb{N}^n) - \Delta_1 \\
&\vdots \\
\Delta_s &:= (\alpha(s) + \mathbb{N}^n) - \bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta_i \\
\bar{\Delta} &:= \mathbb{N}^n - \bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\beta \in \Delta_i$ genau dann, wenn X^β durch $X^{\alpha(i)}$ geteilt wird, aber nicht durch $X^{\alpha(j)}$ für $j < i$.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma \in \bar{\Delta}$ genau dann, wenn X^γ durch kein $X^{\alpha(i)}$ geteilt wird.

(c) Sei nun $f = q_1 g_1 + ... + q_s g_s + r$ das Ergebnis des Divisionsalgorithmus. Zeigen Sie für jedes i folgende Behauptung. Für jedes Monom X^β in q_i gilt $\beta + \alpha(i) \in \Delta_i$ und für jedes Monom X^γ in r gilt $\gamma \in \bar{\Delta}$

(d) Zeigen Sie nun, dass es genau einen Ausdruck der Form $f = q_1 g_1 + ... + q_s g_s + r$ gibt, der die Bedingungen in (c) erfüllt.