SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Berechnung des Erwartungswerts:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Pr[\omega] \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \, .
\end{aligned}
$$

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen ist dabei analog zur Definition des Erwartungswerts erforderlich, dass $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \Pr[\omega]$ konvergiert (absolute Konvergenz).

Satz 7: (Monotonie des Erwartungswerts)

Seien X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] \; = \; \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega] = \mathbb{E}[Y] \,.$$

q. e. d.

Aus Satz 7 folgt insbesondere, dass $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$ gilt, wenn für die Zufallsvariable X die Eigenschaft $a \leq X(\omega) \leq b$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt ist.

Rechenregeln für den Erwartungswert

Oft betrachtet man eine Zufallsvariable X nicht direkt, sondern wendet noch eine Funktion darauf an:

$$Y := f(X) = f \circ X ,$$

wobei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion sei mit $W_X \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$.

Beobachtung:

$f(X)$ ist wieder eine Zufallsvariable.

Aus

$$\Pr[Y = y] \;=\; \Pr[\{\omega \mid f(X(\omega)) = y\}] \;=\; \sum_{x\,:\,f(x)=y} \Pr[X = x]$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[Y] = \sum_{y\in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\
&= \sum_{y\in W_Y} y \cdot \sum_{x\,:\,f(x)=y} \Pr[X = x] = \sum_{x\in W_X} f(x) \cdot \Pr[X = x] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega)) \cdot \Pr[\omega]\,.
\end{aligned}$$

Satz 8: (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a \cdot X + b] &= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\
&= a \cdot \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\
&= a \cdot \mathbb{E}[X] + b\,.
\end{aligned}$$

q. e. d.

Satz 9:

Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \Pr[X = i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j]\,.\end{aligned}$$

q. e. d.

Definition:

Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $\Pr[A] > 0$. Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) := \Pr[X = x \mid A] = \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]}\,.$$

Die Definition von $f_{X|A}$ ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_X} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_X} \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[A]}{\Pr[A]} = 1\,.$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X|A]$ der Zufallsvariablen $X|A$ berechnet sich entsprechend:

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A}(x)\,.$$

Satz 10:

Sei X eine Zufallsvariable. Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ und $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i] \, .$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k = \Omega$ und $\Pr[A_1]$, $\Pr[A_2], \ldots > 0$ gilt analog

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i],$$

sofern die Erwartungswerte auf der rechten Seite alle existieren und die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbb{E}[X|A_i]| \cdot \Pr[A_i]$ konvergiert.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x\in W_X} x\cdot \Pr[X=x] = \sum_{x\in W_X} x\cdot \sum_{i=1}^{n} \Pr[X=x|A_i]\cdot \Pr[A_i]\\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]\cdot \sum_{x\in W_X} x\cdot \Pr[X=x|A_i] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]\cdot \mathbb{E}[X|A_i].\end{aligned}$$

Der Beweis für den unendlichen Fall verläuft analog. *q. e. d.*

Beispiel: Wir werfen eine Münze so lange, bis zum ersten Mal „Kopf" erscheint. Dies geschehe in jedem Wurf unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p. Wir definieren dazu die Zufallsvariable $X :=$ „Anzahl der Würfe". Wir haben bereits gesehen, dass

$$\Pr[X = k] = p(1-p)^{k-1}$$

und damit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}\,.$$

Andere Berechnungsmethode:

(gestützt auf Satz 10)

Definiere das Ereignis

$$K_1 := \text{„Im ersten Wurf fällt Kopf“} .$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}[X|K_1] = 1$.

Nehmen wir nun an, dass im ersten Wurf nicht „Kopf“ gefallen ist. Wir starten das Experiment neu.

Sei X' die Anzahl der Würfe bis zum ersten Auftreten von „Kopf“ im neu gestarteten Experiment. Wegen der Gleichheit der Experimente gilt $\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[X]$. Damit schließen wir

$$\mathbb{E}[X|\bar{K}_1] = 1 + \mathbb{E}[X'] = 1 + \mathbb{E}[X]$$

und erhalten mit Satz 3:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|K_1] \cdot \Pr[K_1] + \mathbb{E}[X|\bar{K}_1] \cdot \Pr[\bar{K}_1] \\ &= 1 \cdot p + (1 + \mathbb{E}[X]) \cdot (1 - p)\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum $\mathbb{E}[X] = 1/p$.