SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen X_n mit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, wobei $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges k mit $0 \leq k \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X_n den Wert k annimmt, gleich

$$b(k; n, p_n) = \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k}$$

Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen X_n mit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, wobei $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges k mit $0 \le k \le n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X_n den Wert k annimmt, gleich

$$\begin{aligned} b(k; n, p_n) &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \cdot (1 - p_n)^{-k} \cdot (1 - p_n)^n \end{aligned}$$

Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen X_n mit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, wobei $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges k mit $0 \leq k \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X_n den Wert k annimmt, gleich

$$
\begin{aligned}
b(k; n, p_n) &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} \\
&= \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \cdot (1 - p_n)^{-k} \cdot (1 - p_n)^n \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n .
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun $n \longrightarrow \infty$ und erinnern uns, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} &= 1, \\ \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} &= 1, \text{ und} \\ \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} &= e^{-\lambda}\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = 1, \text{ und}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} = e^{-\lambda}\,.$$

Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} &= 1, \\ \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} &= 1, \text{ und} \\ \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} &= e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} &= 1, \\
\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} &= 1, \text{ und} \\
\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} &= e^{-\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = 1, \text{ und}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} = e^{-\lambda}.$$

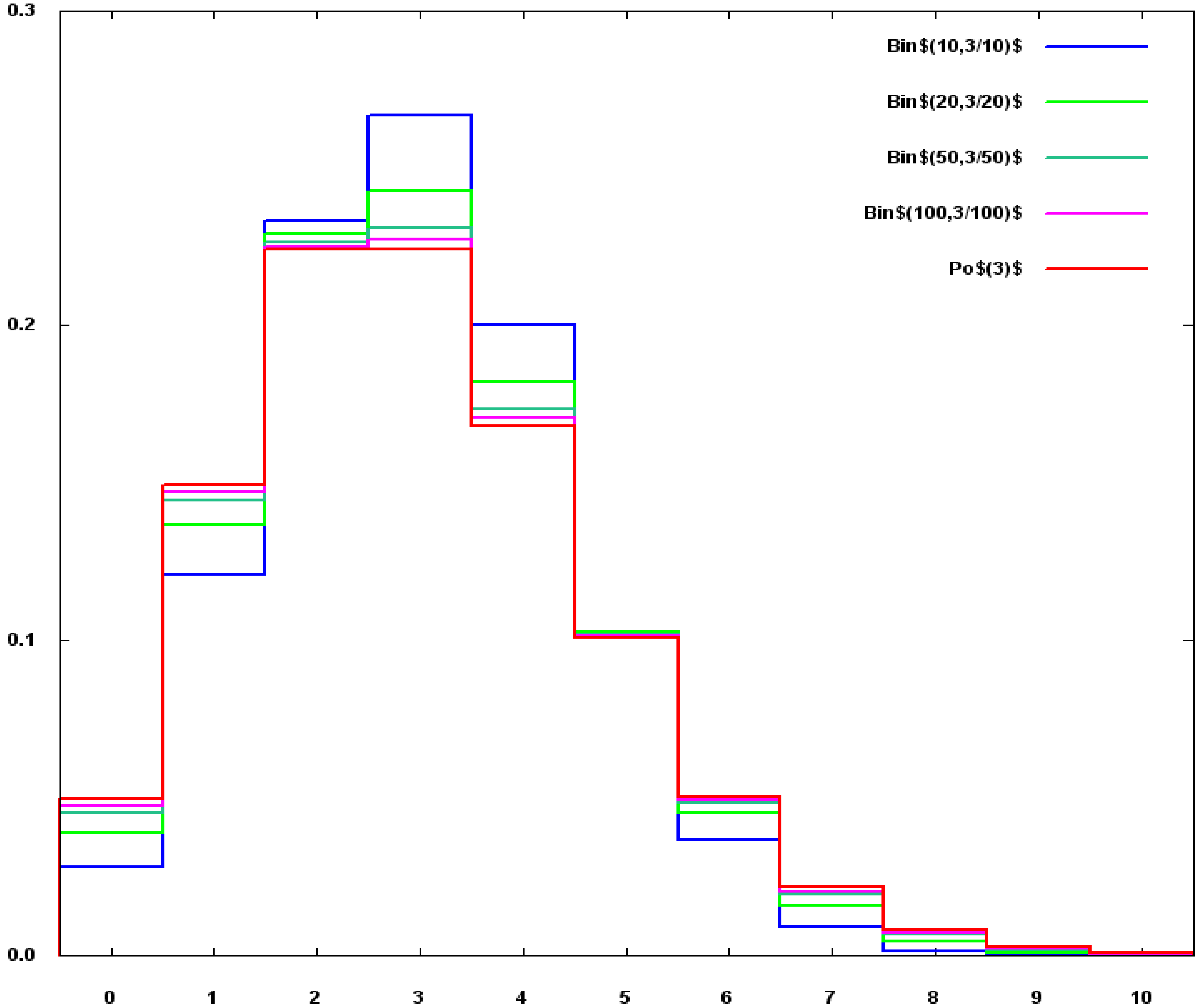
Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} &= 1, \\
\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} &= 1, \text{ und} \\
\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n} &= e^{-\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $b(k; n, p_n)$ konvergiert also für $n \to \infty$ gegen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ den Wert k annimmt. Insgesamt folgt somit, dass die Verteilung einer Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ sich für $n \to \infty$ der Poisson-Verteilung $\mathrm{Po}(\lambda)$ annähert.



Vergleich von Binomial- und Poisson-Verteilung

Ist also n im Vergleich zu λ hinreichend groß, so kann man die Poisson-Verteilung als Approximation der Binomialverteilung verwenden.

Ist also n im Vergleich zu λ hinreichend groß, so kann man die Poisson-Verteilung als Approximation der Binomialverteilung verwenden.

Diese Tatsache wird manchmal auch als Gesetz seltener Ereignisse bezeichnet, da die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Treffers $p_n = \lambda/n$ relativ klein sein muss, wenn die Approximation gute Ergebnisse liefern soll.

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall δt auftritt, ist proportional zur Länge von δt.

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall δt auftritt, ist proportional zur Länge von δt.
- Die Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab, nicht aber von der Lage auf der Zeitachse.

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall δt auftritt, ist proportional zur Länge von δt.
- Die Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab, nicht aber von der Lage auf der Zeitachse.
- Wenn man zwei disjunkte Zeitintervalle betrachtet, so sind die Anzahlen der Ereignisse in diesen Zeiträumen voneinander unabhängig.

Beispiel: Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird. Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel 10^{-4}-mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Beispiel: Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird. Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel 10^{-4}-mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Die Voraussetzungen scheinen erfüllt zu sein, die Anzahl X der Katastrophen durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 10^{-4}$ zu modellieren.

Beispiel: Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird. Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel 10^{-4}-mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Die Voraussetzungen scheinen erfüllt zu sein, die Anzahl X der Katastrophen durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 10^{-4}$ zu modellieren.

Damit gilt

$$\Pr[X \geq 2] \;=\; 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

Beispiel: Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird. Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel 10^{-4}-mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Die Voraussetzungen scheinen erfüllt zu sein, die Anzahl X der Katastrophen durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 10^{-4}$ zu modellieren.

Damit gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 2] &= 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \\ &\approx 1 - 0{,}999900005 - 0{,}000099990 = 5 \cdot 10^{-9}.\end{aligned}$$

Satz 20:

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Po}(\mu)$, dann gilt

$$Z := X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu)\,.$$

Beweis:

$$f_Z(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}\cdot\sum_{x=0}^{z}\frac{z!}{x!(z-x)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \end{aligned}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} \cdot \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!} \cdot \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x},
\end{aligned}
$$

wobei $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} \cdot \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!} \cdot \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}, \end{aligned}$$

wobei $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Da die Summe gleich 1 ist, folgt

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!}.$$

q. e. d.

1.6 Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

1.6.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

Satz 21: (Markov-Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

1.6 Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

1.6.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

Satz 21: (Markov-Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t\,.$$

Beweis:

$$t \cdot \Pr[X \geq t] \;=\; t \cdot \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} \Pr[X = x]$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} \Pr[X = x] \\
&\leq \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x]
\end{aligned}
$$

Beweis:

$$\begin{aligned} t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \mathbb{E}[X]\,. \end{aligned}$$

q. e. d.

Die Markov-Ungleichung ist nach Andrey Andreyevich Markov (1856–1922) benannt, der an der Universität von St. Petersburg bei Chebyshev studierte und später dort arbeitete. Laufbahn. Neben seiner mathematischen Tätigkeit fiel Markov durch heftige Proteste gegen das Zaren-Regime auf und nur sein Status als vermeintlich harmloser Akademiker schützte ihn vor Repressalien durch die Behörden. Im Jahr 1913 organisierte er parallel zum dreihundertjährigen Geburtstag der Zarenfamilie Romanov eine Feier zum zweihundertjährigen Geburtstag des Gesetzes der großen Zahlen.