SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

2.1.4 Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen

Funktionen kontinuierlicher Zufallsvariablen

Sei $Y := g(X)$ mit einer Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Verteilung von Y erhalten wir durch

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[g(X) \leq y] = \int_C f_X(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Hierbei bezeichnet $C := \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) \leq y\}$ alle reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$, für welche die Bedingung „$Y \leq y$" zutrifft. Das Integral über C ist nur dann sinnvoll definiert, wenn C ein zulässiges Ereignis darstellt. Aus der Verteilung F_Y können wir durch Differenzieren die Dichte f_Y ermitteln.

Beispiel:

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $]0,1[$. Für eine Konstante $\lambda > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Y := -(1/\lambda)\ln X$.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr[-(1/\lambda)\ln X \le y] = \Pr[\ln X \ge -\lambda y] \\
&= \Pr[X \ge e^{-\lambda y}] \\
&= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{für } y \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit folgt mit $f_Y(y) = F'_Y(y)$ sofort

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Zufallsvariable mit einer solchen Dichte f_Y nennt man exponentialverteilt.

Beispiel: Sei X eine beliebige Zufallsvariable. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Y := a \cdot X + b$.

Es gilt

$$F_Y(y) = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

und somit

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_X((y-b)/a)}{\mathrm{d}y} = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}.$$

Simulation von Zufallsvariablen

Unter der Simulation einer Zufallsvariablen X mit Dichte f_X versteht man die algorithmische Erzeugung von Zufallswerten, deren Verteilung der Verteilung von X entspricht.

Dazu nehmen wir an, dass die zu simulierende Zufallsvariable X eine stetige, im Bildbereich $]0,1[$ streng monoton wachsende Verteilungsfunktion F_X besitzt. Weiter nehmen wir an, dass U eine auf $]0,1[$ gleichverteilte Zufallsvariable ist, die wir simulieren können.

Aus unserer Annahme über F_X folgt, dass es zu F_X eine (eindeutige) inverse Funktion F_X^{-1} gibt mit $F_X(F_X^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in]0,1[$.

Sei nun

$$\tilde{X} := F_X^{-1}(U)\,,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[\tilde{X} \le t] &= \Pr[F_X^{-1}(U) \le t] \\
&= \Pr[U \le F_X(t)] \\
&= F_U(F_X(t)) \\
&= F_X(t)\,.
\end{aligned}$$

Beispiel: Im obigen Beispiel der Exponentialverteilung gilt $F_X(t) = 1 - e^{-t}$ und wir erhalten auf $]0,1[$ die Umkehrfunktion $F_X^{-1}(t) = -\ln(1-t)$. Also gilt $\tilde{X} = F_X^{-1}(U) = -\ln(1-U)$.

Statt $\tilde{X}$ haben wir im Beispiel die Zufallsvariable $-\ln U$ betrachtet, die aber offensichtlich dieselbe Verteilung besitzt.

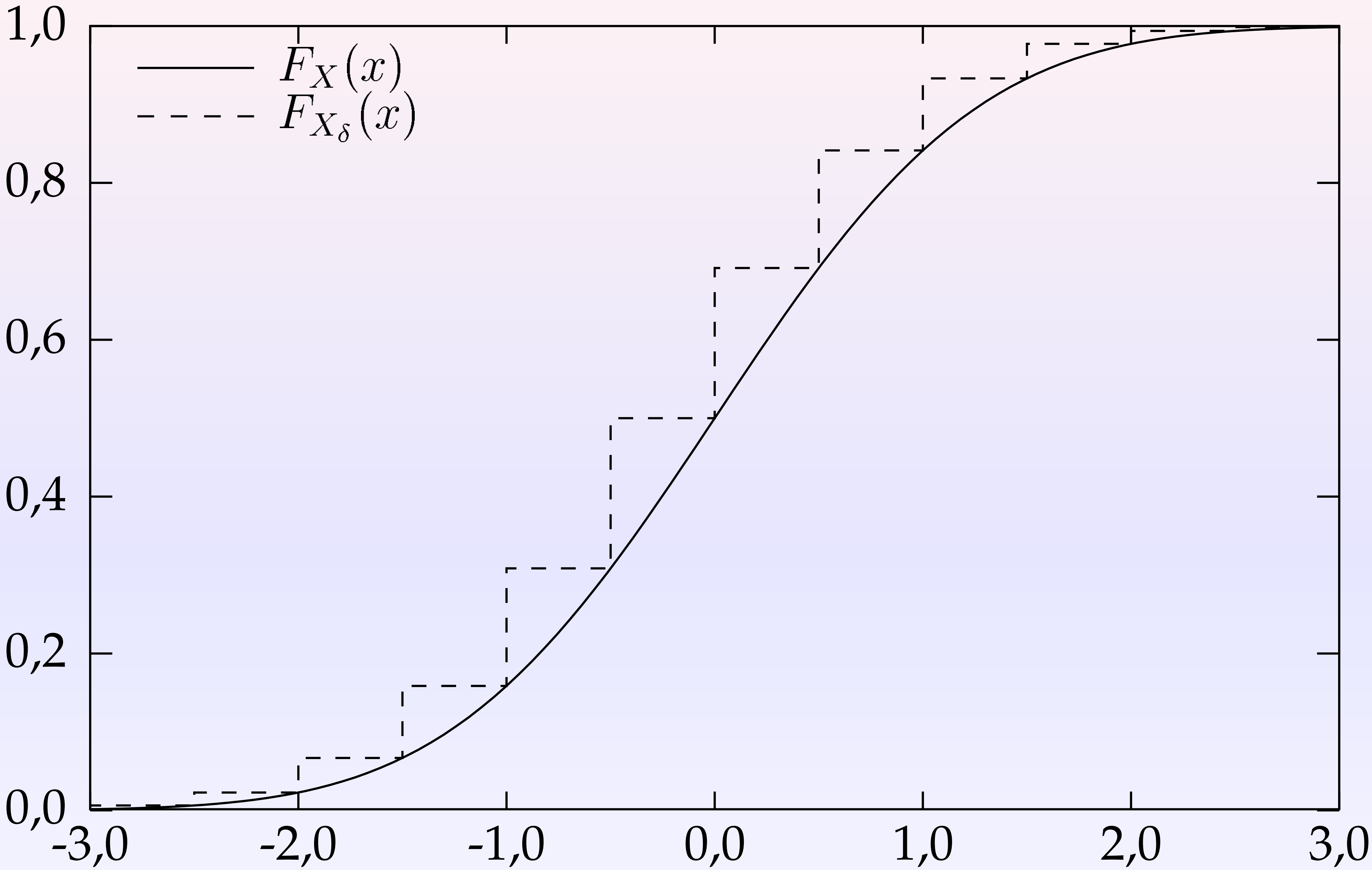
Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable. Wir können aus X leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes $\delta > 0$ definieren

$$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[\text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Für X_δ gilt

$$\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta)\,.$$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an.

Erwartungswert und Varianz

Definition: Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \,\mathsf{d}\, t,$$

sofern das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t) \,\mathsf{d}\, t$ endlich ist.

Für die Varianz gilt entsprechend

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t) \,\mathsf{d}\, t,$$

wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ existiert.

Lemma 34: Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$Y := g(X)\,.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung nur für den einfachen Fall, dass g eine lineare Funktion ist, also $Y := a \cdot X + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\,t.$$

Durch die Substitution $u := (t-b)/a$ mit $\mathrm{d}u = (1/a)\mathrm{d}t$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u) \,\mathsf{d}\, u.$$

q. e. d.

Beispiel: Für Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung ergibt sich

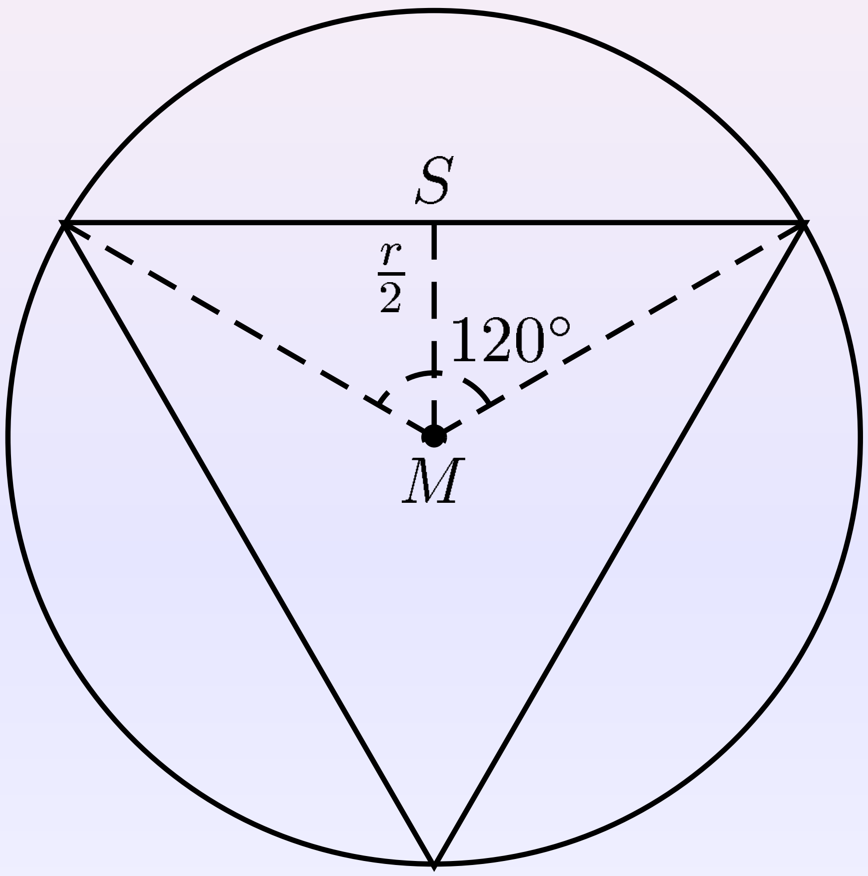
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t \cdot \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2(b-a)} \cdot [t^2]_a^b \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 \cdot \mathrm{d}\,t = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}, \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \ldots = \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

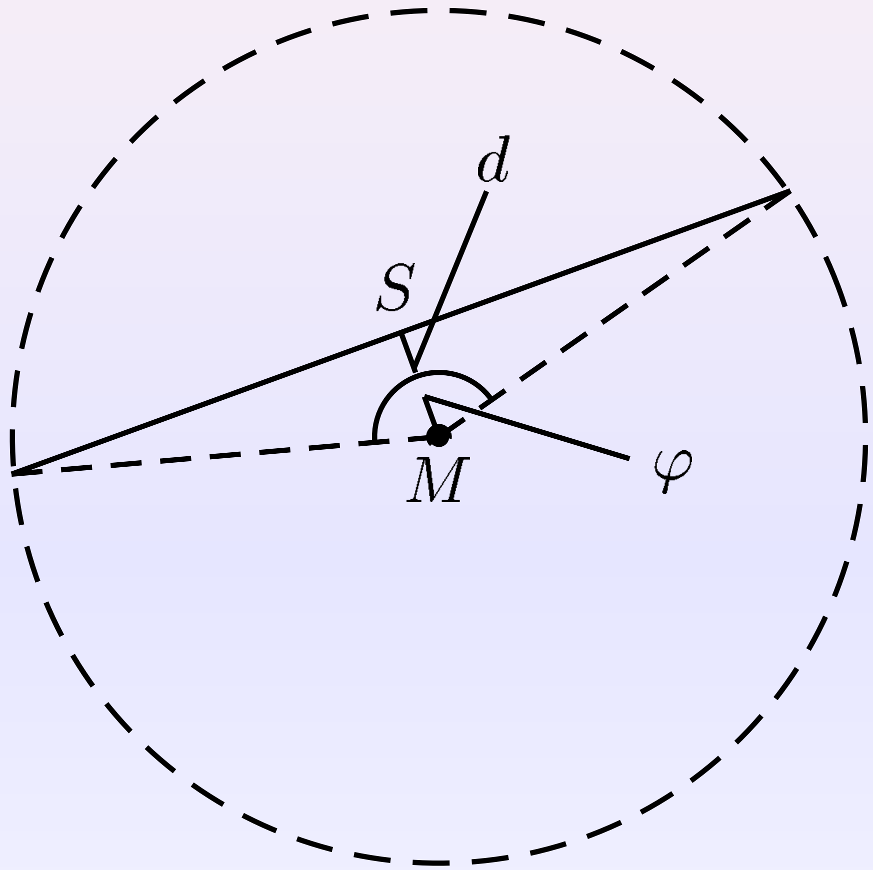
Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

Bertrand’sches Paradoxon

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis A).


S
$\frac{r}{2}$
$120°$
M


d
S
M
φ

Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

2.2 Wichtige stetige Verteilungen

2.2.1 Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

2.2.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung nimmt unter den stetigen Verteilungen eine besonders prominente Position ein.

Definition: Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x;\mu,\sigma)$$

besitzt.

In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x;0,1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\,t =: \Phi(x; \mu, \sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).

Lemma 35:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis: Wir berechnen zunächst I^2:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}\,y\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,. \end{aligned}$$

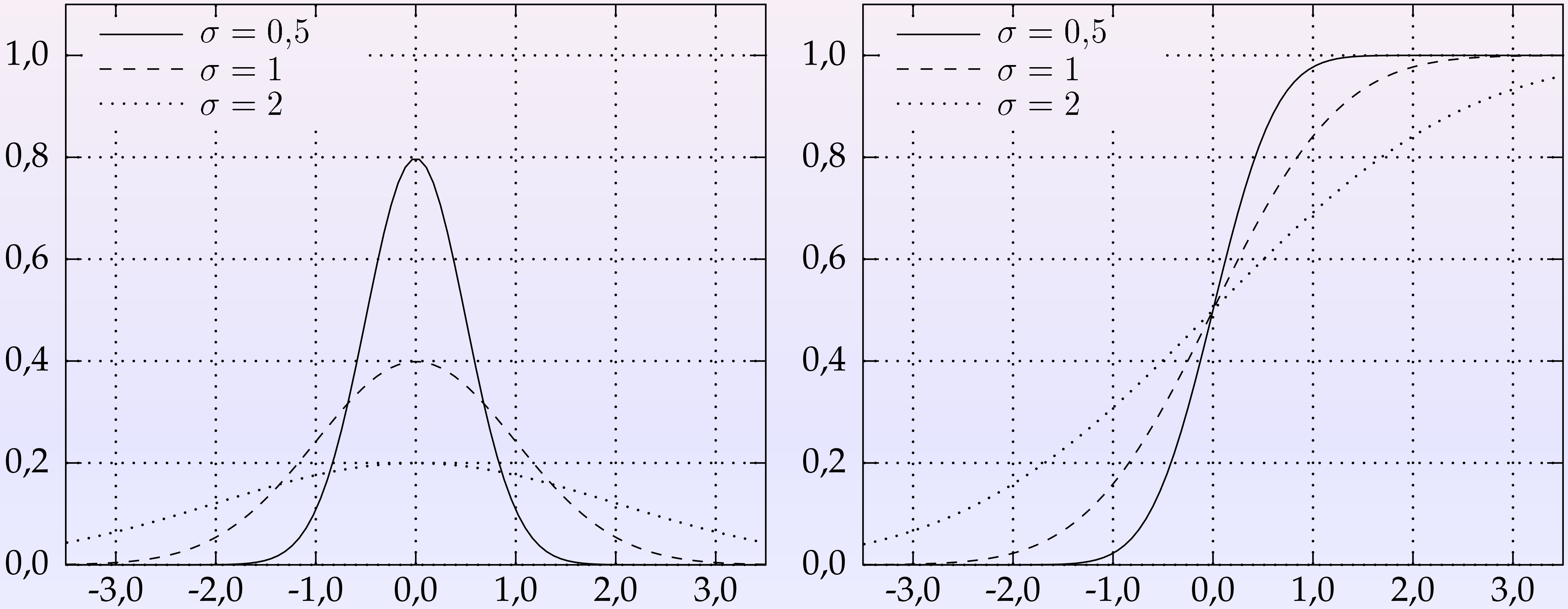
Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen $x := r\cos\phi$ und $y := r\sin\phi$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \, \mathsf{d}\, r \, \mathsf{d}\, \phi = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^{\infty} \mathsf{d}\, \phi \\
&= \int_0^{2\pi} 1 \, \mathsf{d}\, \phi = 2\pi.
\end{aligned}
$$

q. e. d.



Dichte und Verteilung von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$