SS 2005

Einführung in die Informatik IV

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2005SS/info4/index.html.de

29. April 2005

Satz 39

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

Sei also $L = L(\gamma)$.

Wir zeigen: $\exists$ NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion.

Induktionsanfang: Falls $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, oder $\gamma = a \in \Sigma$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 39

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

Sei also $L = L(\gamma)$.

Wir zeigen: $\exists$ NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion.

Induktionsanfang: Falls $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, oder $\gamma = a \in \Sigma$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 39

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

Sei also $L = L(\gamma)$.

Wir zeigen: $\exists$ NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion.

Induktionsanfang: Falls $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, oder $\gamma = a \in \Sigma$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Induktionsschritt:

$\gamma = \alpha\beta$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

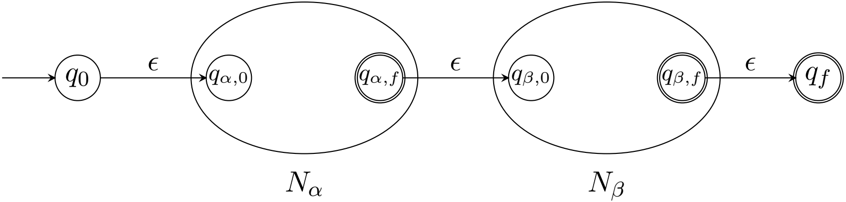
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$

Induktionsschritt:

$\gamma = \alpha\beta$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$



Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha \mid \beta)$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

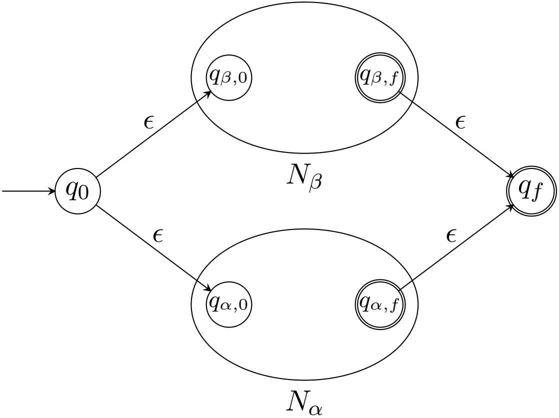
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$

Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha \mid \beta)$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$



Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha)^*$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α mit

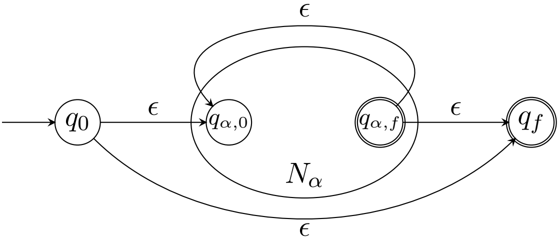
$$L(N_\alpha) = L(\alpha)\ .$$

Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha)^*$:

nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha)\ .$$



"$\Longleftarrow$":

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k :=\{w \in \Sigma^*;$ die Eingabe w überführt den im Zustand q_i gestarteten Automaten in den Zustand q_j, wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich k haben$\}$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $k \in \{-1, 0, 1, \ldots, n\}$ gilt:
Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

"$\Longleftarrow$":

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

R_{ij}^k :=$\{w \in \Sigma^*;$ die Eingabe w überführt den im Zustand q_i gestarteten Automaten in den Zustand q_j, wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich k haben$\}$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $k \in \{-1, 0, 1, \ldots, n\}$ gilt:
Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

"$\Longleftarrow$":
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat.
Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_0, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^*;\ \text{die Eingabe } w \text{ überführt den im Zustand } q_i \text{ gestarteten Automaten in den Zustand } q_j\text{, wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich } k \text{ haben}\}$$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $k \in \{-1, 0, 1, \ldots, n\}$ gilt:
Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.: Induktion über k:
$k = -1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{-1} := \begin{cases} \{a \in \Sigma;\ \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma;\ \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

R_{ij}^{-1} ist also endlich und lässt sich daher durch einen regulären Ausdruck α_{ij}^{-1} beschreiben.

Bew.: Induktion über k:

$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i\,k+1}^{k}(R_{k+1\,k+1}^{k})^{*}R_{k+1\,j}^{k}$$
$$\alpha_{ij}^{k+1} = (\alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i\,k+1}^{k}(\alpha_{k+1\,k+1}^{k})^{*}\alpha_{k+1\,j}^{k})$$

Somit gilt: $L(M) = L((\alpha_{0\,f_1}^{n} \mid \alpha_{0\,f_2}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{0\,f_r}^{n}))$, wobei $f_1, \ldots, f_r$ die Indizes der Endzustände seien.

$\square$

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 40

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R}_1), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$: Sei $R_1 = L(A)$, A DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig. Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$. Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$

$R_1 \cap R_2$: De Morgan

$\square$

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 40

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R}_1), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$: Sei $R_1 = L(A)$, A DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$

$R_1 \cap R_2$: De Morgan

□

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 40

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R_1}), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$: Sei $R_1 = L(A), A$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$

$R_1 \cap R_2$: De Morgan

$\square$

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 40

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R}_1), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$	:	Sei $R_1 = L(A), A$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig. Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$. Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$
$R_1 \cap R_2$	:	De Morgan

□

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 40

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R_1}), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$	:	Sei $R_1 = L(A), A$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,
		δ vollständig.
		Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
		Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$
$R_1 \cap R_2$	:	De Morgan

$\square$

Definition 41

Substitution (mit regulären Mengen) ist eine Abbildung, die jedem $a \in \Sigma$ eine reguläre Menge $h(a)$ zuordnet. Diese Abbildung wird kanonisch auf Σ^* erweitert.
Ein Homomorphismus ist eine Substitution mit $\forall a \in \Sigma : |h(a)| = 1$

Satz 42

Reguläre Sprachen sind unter (regulärer) Substitution, Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen.

Definition 41

Substitution (mit regulären Mengen) ist eine Abbildung, die jedem $a \in \Sigma$ eine reguläre Menge $h(a)$ zuordnet. Diese Abbildung wird kanonisch auf Σ^* erweitert.
Ein Homomorphismus ist eine Substitution mit $\forall a \in \Sigma : |h(a)| = 1$

Satz 42

Reguläre Sprachen sind unter (regulärer) Substitution, Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen.

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.

Sei $h : \Delta \rightarrow \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \ ,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.
Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \;,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

□

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.

Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta ,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.

Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \ ,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.

Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \delta(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \ ,$$

wobei wir nunmehr der Einfachheit halber statt $\hat{\delta}$ nur δ schreiben.

Also gilt

$$\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Definition 43

Seien $L_1,\, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 44

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\delta(q, y) \in F\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. □

Definition 43

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 44

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\delta(q, y) \in F\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. □

Definition 43

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 44

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\delta(q, y) \in F\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. $\square$

Definition 43

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 44

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\delta(q,y) \in F\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. $\square$

Lemma 45

Es gibt einen Algorithmus, der für zwei (nichtdeterministische, mit ϵ-Übergängen) endliche Automaten A_1 und A_2 entscheidet, ob sie äquivalent sind, d.h. ob

$$L(A_1) = L(A_2)\ .$$

Beweis:

Konstruiere einen endlichen Automaten für $(L(A_1) \setminus L(A_2)) \cup (L(A_2) \setminus L(A_1))$ (symmetrische Differenz). Prüfe, ob dieser Automat ein Wort akzeptiert. $\square$

Lemma 45

Es gibt einen Algorithmus, der für zwei (nichtdeterministische, mit ϵ-Übergängen) endliche Automaten A_1 und A_2 entscheidet, ob sie äquivalent sind, d.h. ob

$$L(A_1) = L(A_2)\ .$$

Beweis:

Konstruiere einen endlichen Automaten für $(L(A_1) \setminus L(A_2)) \cup (L(A_2) \setminus L(A_1))$ (symmetrische Differenz). Prüfe, ob dieser Automat ein Wort akzeptiert. $\square$

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ *regulär. Dann gibt es ein* $n > 0$*, so dass für jedes* $z \in R$ *mit* $|z| \geq n$ *es* $u, v, w \in \Sigma^*$ *gibt, so dass gilt:*

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0 : uv^i w \in R$.

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0: \; uv^iw \in R$.

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0 : uv^iw \in R$.

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0 : uv^iw \in R$.

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0 : \; uv^i w \in R$.

Satz 46 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ es $u, v, w \in \Sigma^*$ gibt, so dass gilt:

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0: \; uv^iw \in R$.

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0\,.$$

$\square$

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0\,.$$

$\square$

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0 .$$

$\square$

Beweis:

Sei $R = L(A), A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0\,.$$

$\square$