Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Wiederholungsklausur
7. November 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ □□
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1).

Jede nullierbare Variable ist nutzlos.	J N
Eine Sprache A ist genau dann mehrdeutig, wenn es eine mehrdeutige Grammatik gibt, die A erzeugt.	J N
Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen deterministischen Kellerautomaten K, der L erkennt, d. h. $L = L(K)$.	J N
Der Wertebereich der Ackermann-Funktion ist entscheidbar.	J N
Das Komplement jeder kontextsensitiven Sprache ist kontextsensitiv.	J N
Zu jeder $LL(k)$-Grammatik gibt es eine äquivalente $LR(k)$-Grammatik. ...	J N
Jede $LOOP$-berechenbare Funktion ist total.	J N
Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch $GOTO$-berechenbar.	J N

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Sei G die Grammatik $G = (\{S, X, Y, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \mid XY\,, \\ X &\rightarrow Ab \mid b\,, \\ Y &\rightarrow cA \mid c\,, \\ A &\rightarrow aA \mid a\,. \end{aligned}$$

1. Geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ und 2 verschiedene Ableitungsbäume von w an, um die Mehrdeutigkeit von G zu zeigen!
2. Zeigen Sie, dass $abcacb \notin L(G)$ gilt!
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der $L(G)$ darstellt (d. h. $R = L(G)$)!

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $\Sigma = \{x, y, z\}$. Sei L die Sprache

$$L \;=\; (\, x^* yz\, x^* \,)^* \subseteq \Sigma^* \,.$$

1. Geben Sie einen endlichen (deterministischen oder nichtdeterministischen) Automaten A an, der L erkennt bzw. akzeptiert.

2. Geben Sie eine reguläre **und** eindeutige Grammatik G an, die L erzeugt.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $G = (\{Z, A, B, X, Y\}, \{a, b\}, P, Z)$ mit den Produktionen

$$
\begin{array}{rclcrcl}
Z & \rightarrow & A \mid ZB\,, & & & & \\
A & \rightarrow & aX \mid a\,, & \qquad & X & \rightarrow & BY\,, \\
B & \rightarrow & bB \mid b\,, & \qquad & Y & \rightarrow & AZ\,.
\end{array}
$$

1. Konstruieren Sie eine Grammatik G_1 in Greibach-Normalform, die $L(G)$ erzeugt.

2. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten (NPDA) K_1, der $L(G)$ akzeptiert.

   Hinweis: Gehen Sie bei der Konstruktion des Kellerautomaten am besten von der Grammatik G_1 in Greibach-Normalform aus.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Sei $L \subseteq \{a\}^*$, wobei a ein Buchstabe eines Alphabets sei.

1. Es gelte $L = \{a\}^*$.
   Zeigen Sie, dass dann $n = 1$ eine Pumping-Lemma-Konstante von L ist.

2. Sei L kontextfrei, und sei $n = 1$ sei eine Pumping-Lemma-Konstante von L.
   Zeigen Sie: Falls L nicht endlich ist, dann gilt $L = \{a\}^*$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a \in L$ gilt.

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Mit $\#_x(w)$ bezeichnen wir die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben $x \in \Sigma$ in einem Wort $w \in \Sigma^*$. Wir betrachten die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \, ; \, \#_a(w) = \#_b(w)\} \setminus \{\epsilon\}.$$

(Beispiel: $aababb \in L$.)

Definieren Sie eine linear beschränkte Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die L akzeptiert (ungeachtet der Tatsache, dass es auch einen Kellerautomaten gibt, der L akzeptiert)!

Man beachte dabei, dass $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ für das Leerzeichen steht, das auf fast allen Feldern des beidseitig unendlichen Bandes von M zu finden ist mit Ausnahme der Felder, auf denen die Eingabe $w \in \Sigma$ steht. Bei Beginn einer Berechnung steht der Kopf der Turingmaschine links vor dem ersten Buchstaben von w. Das Leerzeichen darf nicht überschrieben werden. Ein Eingabewort wird akzeptiert genau dann, wenn M einen Endzustand erreicht.

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}$ durch die Rekursion

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1)$$

mit den Startwerten $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.
2. Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist, d. h., es gilt $f(n) < f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Ansage im Hörsaal: $n \neq 1$).
3. Ist der Wertebereich von f entscheidbar?
