Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Wenn sich die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle t_i überschneiden, dann gilt

$$D_e(v_i, t_i) = \max_{v \in V} \{D_e(v, t_i)\}$$

oder kurz

$$D_e(t_i) = D_e(v_i, t_i)$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Annahme: Lemma gilt nicht, sondern es gibt einen Knoten v' mit $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$.
- Da $D_e(v_i, t_i)$ an der Stelle t_i einen positiven Anstieg hat, impliziert die Ungleichung, dass $D_e(v_i, 0) < D_e(v', 0)$, also $v' \in \bar{V}_i$.
- Andererseits impliziert $D_e(v_i, t_i) < D_e(v', t_i)$, dass $D_e(\bar{v}_i, t_i) < D_e(v', t_i)$ (weil $D_e(v_i, t_i) = D_e(\bar{v}_i, t_i)$).
- Da $D_e(\bar{v}_i, t)$ an der Stelle t_i einen negativen Anstieg hat, folgt $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v', \ell(e))$.
- Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $\bar{v}_i$.

$\square$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Folgerung (aus den letzten beiden Lemmas)

Sei $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \ell(e)$ *und für die Werte* $i \in \{1 \dots n\}$ *mit* $\bar{V}_i \neq \emptyset$ *sei* t_i *der Schnittpunkt, wo* $D_e(v_i, t)$ *und* $D_e(\bar{v}_i, t)$ *sich schneiden.*

Sei $D_0 = \max_{v \in V}\{D_e(v, 0)\}$, $D_{n+1} = \max_{v \in V}\{D_e(v, \ell(e))\}$ *und für die Werte* $i \in \{1 \dots n\}$, *wo* t_i *definiert ist, sei* $D_i = D_e(v_i, t_i)$.

Sei j *ein Index, für den*

$$D_j = \min_{i \in \{0 \dots n+1\}} \{D_i \mid D_i \text{ ist definiert}\}$$

Dann ist D_j *der local radius auf* e *und das entsprechende* t_j *ist ein local center auf* e.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Wenn für zwei Knoten v_i und v_j gilt, dass

$$\begin{aligned} D_e(v_i, 0) &= D_e(v_j, 0) \\ D_e(v_i, \ell(e)) &\geq D_e(v_j, \ell(e)), \end{aligned}$$

dann muss der Schnittpunkt t_j aus der vorangegangenen Folgerung (wo sich $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ schneiden) nicht betrachtet werden.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Aus den Bedingungen des Lemmas folgt für alle t $(0 \leq t \leq \ell(e))$, dass $D_e(v_i, t) \geq D_e(v_j, t)$.
- Angenommen, t_j ist ein local center auf e, dann impliziert die Definition von local center, dass $D_e(v_j, t_j) \geq D_e(v_i, t_j)$ und man erhält $D_e(v_i, t_j) = D_e(v_j, t_j)$.
- Andererseits impliziert die Definition von $\bar{v}_i$, dass $\bar{v}_i = \bar{v}_j$ und deshalb $D_e(\bar{v}_i, t_j) = D_e(\bar{v}_j, t_j)$.
- Deshalb ist der Schnittpunkt t_j von $D_e(v_j, t)$ und $D_e(\bar{v}_j, t)$ gleichzeitig der Schnittpunkt von $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$.
- Damit ist es in der Folgerung ausreichend, nur den Punkt t_i zu betrachten und t_j zu ignorieren.

$\square$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Der folgende Algorithmus basiert auf der letzten Folgerung und dem letzten Lemma.
- In einer Vorberechnung wird für jeden Knoten $v \in V$ eine Liste $L(v)$ konstruiert, in dem die Knoten des Graphen in monoton fallender Reihenfolge ihrer Distanz zu v stehen. Knoten v ist dabei der letzte in seiner Liste $L(v)$.
- Unter der Annahme, dass die Distanzmatrix bekannt ist, dauert die Konstruktion jeder Liste $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritte.
- Gesamtkomplexität für alle Knoten: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Sei $e = (v_r, v_s)$ und sei v_i der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.
- Dann gilt

$$D_e(v_1, 0) \geq D_e(v_2, 0) \geq \ldots \geq D_e(v_{n-1}, 0) > D_e(v_n, 0) = 0$$

  In dieser Notation ist v_r (der Endpunkt von e) benannt mit v_n.
- Der folgende Algorithmus zum Finden eines local centers auf e arbeitet etappenweise, wobei man in der i-ten Phase die Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ betrachtet und deren Schnittpunkt berechnet, falls es notwendig ist.
- Man beachte, dass falls für ein j und k $(1 < j \leq k < n)$ gilt, dass

$$D_e(v_{j-1}, 0) > D_e(v_j, 0) = \ldots = D_e(v_k, 0) > D_e(v_{k+1}, 0)$$

  dann gilt aufgrund der Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$, dass

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{j+1} = \ldots = \bar{v}_k.$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Falls v_m (mit $j \leq m \leq k$) ein Knoten mit minimalem Index ist, so dass
$$D_e(v_m, \ell(e)) = \max_{j \leq i \leq k} \{D_e(v_i, \ell(e))\}$$
dann impliziert das letzte Lemma, dass aus der ganzen Knotenmenge $\{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k\}$ nur der Knoten v_m betrachtet werden sollte (genauer gesagt wird der Schnittpunkt t_m von $D_e(v_m, t)$ und $D_e(\bar{v}_m, t)$ als mögliches local center betrachtet).
- Aufgrund der Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$ und aufgrund der Reihenfolge in Liste $L(v_r)$ folgt, dass Knoten $\bar{v}_{k+1}$ genau der Knoten ist (von den beiden Knoten $\bar{v}_j$ und v_m), für den gilt:

$$D_e(\bar{v}_{k+1}, \ell(e)) = \max \left\{ \begin{array}{l} D_e(\bar{v}_j, \ell(e)), \\ D_e(v_m, \ell(e)) \end{array} \right\}$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Sei k eine natürliche Zahl, so dass

$$D_e(v_1, 0) = \ldots = D_e(v_k, 0) > D_e(v_{k+1}, 0) \qquad (1 \leq k < n)$$

- Die Definitionen von V_i und $\bar{v}_i$ implizieren, dass die Knoten $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ nicht definiert sind (Diese Knoten müssen in der letzten Folgerung nicht betrachtet werden).
- Man beachte aber, dass für die gleiche Definition für v_m wie zuvor, d.h., v_m mit $1 \leq m \leq k$ ist ein Knoten mit minimalem Index, so dass

$$D_e(v_m, \ell(e)) = \max_{1 \leq i \leq k} \{D_e(v_i, \ell(e))\},$$

dann impliziert die spezielle Sortierung von $L(v_r)$, dass $\bar{v}_{k+1} = v_m$.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Im folgenden Algorithmus von Kariv und Hakimi repräsentieren die Variablen t^* und r ein local center bzw. den local radius auf Kante $e = (v_r, v_s)$.

Knoten v_i und $\bar{v}_i$ werden repräsentiert durch Variable v^* bzw. $\bar{v}^*$.

1. Behandlung der Punkte $t = 0$ und $t = \ell(e)$:
   Sei v^* der erste Knoten von Liste $L(v_r)$ und sei $\hat{v}$ der erste Knoten von Liste $L(v_s)$.

   Falls $D_e(v^*, 0) \leq D_e(\hat{v}, \ell(e))$, dann $t^* \leftarrow 0$, $r \leftarrow D_e(v^*, 0)$;
   sonst $t^* \leftarrow \ell(e)$, $r \leftarrow D_e(\hat{v}, \ell(e))$.

   Wenn $v^* = \hat{v}$, dann STOP.

   (Für alle $v \in V$ und $t \in [0, \ell(e)]$: $D_e(v, t) \leq D_e(v^*, t)$, also $D_e(v^*, t) = D_e(t)$ und t^* und r sind ein local center und der local radius auf e)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

2. Initialisierung der Phasen:
   $i \leftarrow 1$, $v_m \leftarrow v^*$
3. Behandlung aller Knoten v mit $D_e(v, 0) = D_e(v_1, 0)$:
   $i \leftarrow i + 1$
   Sei v^* der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.
   Wenn $D_e(v^*, 0) \neq D_e(v_m, 0)$ dann gehe zu Schritt 4;
   sonst falls $D_e(v^*, \ell(e)) > D_e(v_m, \ell(e))$: $v_m \leftarrow v^*$. Wiederhole Schritt 3.
   (Wegen $D_e(v_i, 0) = D_e(v_1, 0)$ ist $i < n$.)
4. $\bar{v}^* \leftarrow v_m$
   Wenn $i = n$, dann gehe zu Schritt 8;
   sonst $v_m \leftarrow v^*$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

5. Finde alle Knoten v mit $D_e(v, 0) = D_e(v_i, 0)$, sowie das entsprechende $v1_m$:

   $i \leftarrow i + 1$

   Sei v^* der i-te Knoten in Liste $L(v_r)$.

   Falls $D_e(v^*, 0) \neq D_e(v_m, 0)$, dann gehe zu Schritt 6;
   sonst falls $D_e(v^*, \ell(e)) > D_e(v_m, \ell(e))$: $v_m \leftarrow v^*$.
   Wiederhole Schritt 5.
   (Wegen $D_e(v_i, 0) = D_e(v_{i-1}, 0)$ ist $i < n$.)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

6. Behandlung des Punkts t_m:

   Wenn sich die Funktionen $D_e(v_m, t)$ und $D_e(\bar{v}^*, t)$ nicht schneiden oder sich in einem ganzen Segment überlagern, dann gehe zu Schritt 7.

   Sonst sei t_m der Schnittpunkt.
   Falls $D_e(v_m, t_m) < r$, dann $t^* \leftarrow t_m$, $r \leftarrow D_e(v_m, t_m)$.

7. Gehe zum nächsten Knoten:

   Wenn $D_e(v_m, \ell(e)) > D_e(\bar{v}^*, \ell(e))$ dann $\bar{v}^* \leftarrow v_m$

   Wenn $i = n$, gehe zu Schritt 8;
   sonst $v_m \leftarrow v^*$ und gehe zu Schritt 5.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

8. Behandlung von Knoten v_n:

   Wenn sich die Funktionen $D_e(v^*, t)$ und $D_e(\bar{v}^*, t)$ nicht schneiden oder sich in einem ganzen Segment überlagern, dann STOP.
   Sonst sei t_m der Schnittpunkt.
   Falls $D_e(v^*, t_m) \geq r$, dann STOP;
   sonst $t^* \leftarrow t_m$, $r \leftarrow D_e(v^*, t_m)$ und STOP.

Unter der Annahme, dass die Distanzmatrix und die Listen $L(v_r)$ und $L(v_s)$ verfügbar sind, ist die Komplexität $\mathcal{O}(n)$.

1-centers in knoten-ungewichteten Graphen

1. Konstruiere für jeden Knoten $v \in V$ eine Liste $L(v)$ aller Knoten in einer Reihenfolge monoton fallender Distanz von v.
2. Berechne mit Hilfe des vorangegangenen Algorithmus für jede Kante e des Graphen das local center und den local radius von e.
3. Der minimale local radius ist der 1-radius des Graphen. Jedes local center mit minimalem local radius ist ein 1-center des Graphen.

Schritt 1 benötigt Zeit $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
Schritt 2 benötigt Zeit $\mathcal{O}(mn)$.
Wenn die Distanzmatrix des Graphen bekannt ist, benötigt der gesamte Algorithmus Zeit $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$.

Minimum Diameter Spanning Trees

Satz

Sei

- x^* *ein absolute* 1-*center von* G *und*
- $T(x^*)$ *ein Shortest Path Tree, der* x^* *mit allen Knoten in* V *verbindet.*

Dann ist $T(x^*)$ *ein* ***Minimum Diameter Spanning Tree*** *von* G *(ein Spannbaum mit minimalem Durchmesser).*

Minimum Diameter Spanning Trees

Beweis.

Sei T ein beliebiger Spannbaum von G und $y^*(T)$ dessen absolute 1-center. ($y^*(T)$ ist eindeutig und für den Durchmesser von T gilt $D(T) = 2\max_{v \in V}\{d_T(y^*(t), v)\}$).
x^* ist Mittelpunkt von jedem Durchmesser(-Pfad) von $T(x^*)$.

$$\begin{aligned}
D(T(x^*)) &= 2\max_{v\in V} d_{T(x^*}(x^*, v) && (1)\\
&= 2\max_{v\in V} d_G(x^*, v) && (2)\\
&\leq 2\max_{v\in V} d_G(y^*(T), v) && (3)\\
&\leq 2\max_{v\in V} d_T(y^*(T), v) = D(T) && (4)
\end{aligned}$$

□