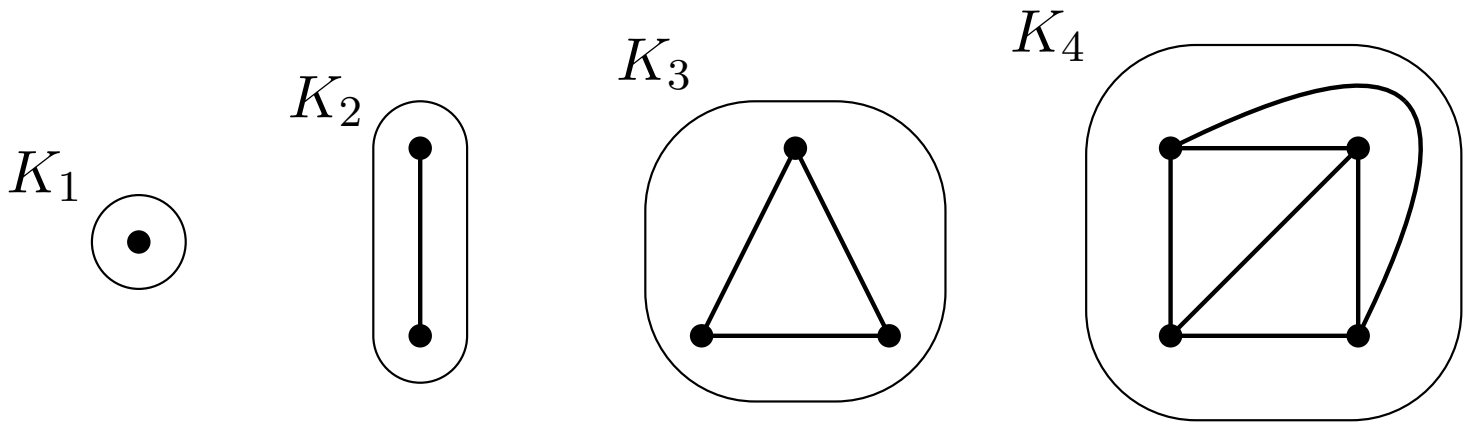
Das Komplement $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ eines Graphen $G = (V, E)$ besitzt die gleiche Knotenmenge V und hat als Kantenmenge alle Kanten des vollständigen Graphen ohne die Kantenmenge E.

Ein Graph $H = (V', E')$ heißt Teilgraph (aka. Subgraph) von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. H heißt (knoten-) induzierter Teilgraph, falls H Teilgraph von G ist und

$$E' = E \cap \binom{V'}{2}.$$

Ein Kantenzug (oder Pfad) ist eine Folge $e_1 := \{v_0, v_1\}, \ldots, e_l := \{v_{l-1}, v_l\}$. v_0 und v_l sind die Endknoten, l ist die Länge des Kantenzuges. Sind bei einem Pfad alle v_i (und damit erst recht alle e_i) verschieden, so sprechen wir von einem einfachen Pfad. Ein Kantenzug mit $v_l = v_0$ heißt Zykel oder Kreis. Ein Kreis, in dem alle v_i verschieden sind, heißt einfacher Kreis.

Ein (ungerichteter) Graph G heißt zusammenhängend, wenn es für alle $u, v \in V$ einen Pfad gibt, der u und v verbindet. Ein (knoten-)maximaler induzierter zusammenhängender Teilgraph heißt (Zusammenhangs-)Komponente.



Ein Graph G heißt azyklisch, wenn er keinen Kreis enthält. Wir bezeichnen einen solchen ungerichteten Graphen dann als Wald. Ist dieser auch zusammenhängend, so sprechen wir von einem Baum. Ist der Teilgraph $T = (V, E') \subseteq G = (V, E)$ ein Baum, dann heißt T ein Spannbaum von G.

Satz 95

Ist $T = (V, E)$ ein Baum, dann ist $|E| = |V| - 1$.

Beweis:

Induktion über die Anzahl n der Knoten:
$n = 0, 1$: klar.
$n \to n + 1$: Sei $|V| = n + 1$. Da T zusammenhängend ist, ist $\deg(v) \geq 1$ für alle $v \in V$. T muss einen Knoten v mit $\deg(v) = 1$ enthalten, denn ansonsten würde, wie wiederum eine einfache Induktion zeigt, T einen Kreis enthalten. Wende nun die Induktionsannahme auf den durch $V - \{v\}$ induzierten Teilgraphen an. □

Korollar 96

Ein (ungerichteter) Graph G ist zusammenhängend, gdw G einen Spannbaum hat.

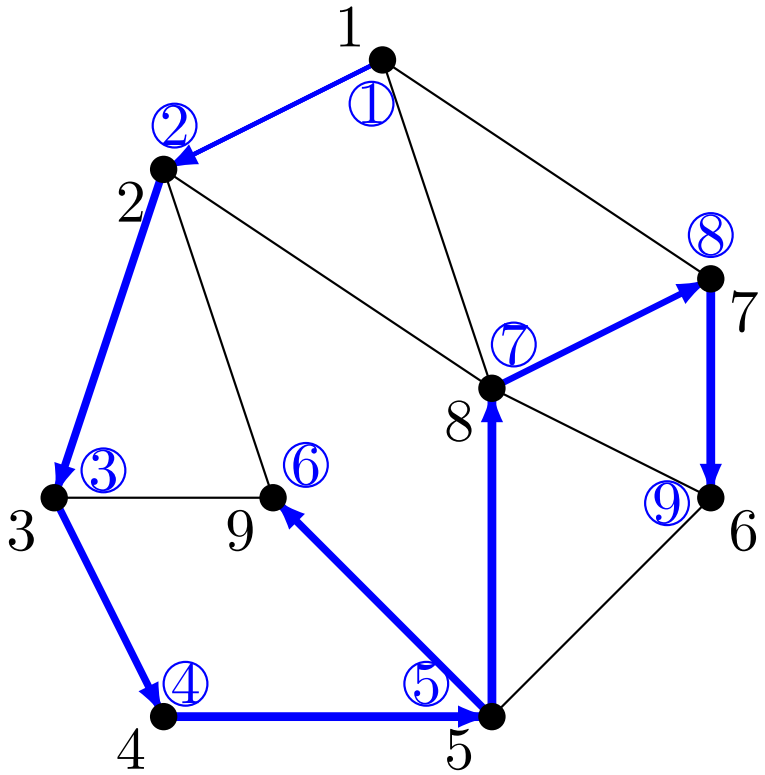
2. Traversierung von Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Anhand eines Beipiels betrachten wir die zwei Algorithmen DFS (Tiefensuche) und BFS (Breitensuche).

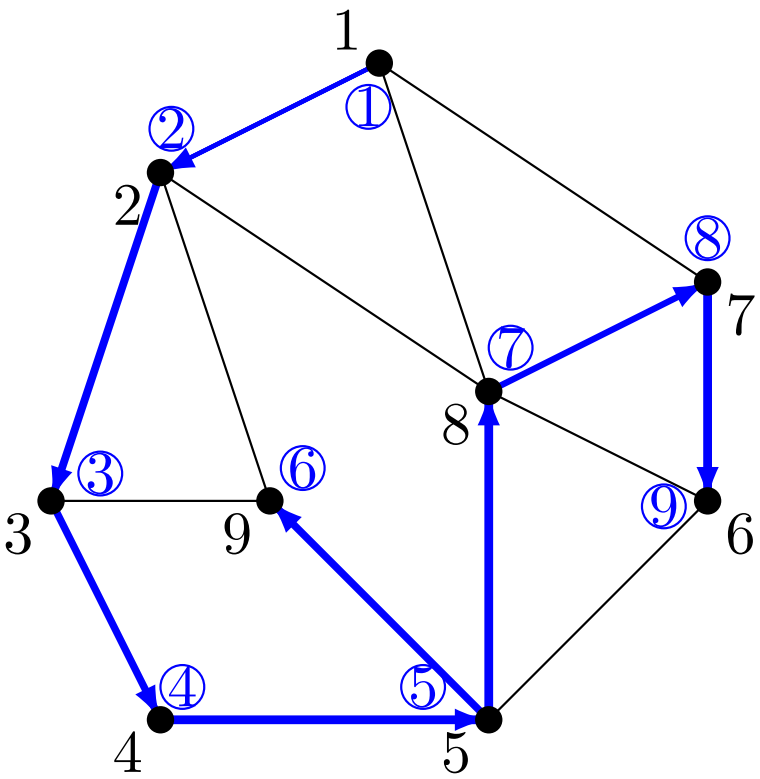
2.1 DFS-Algorithmus

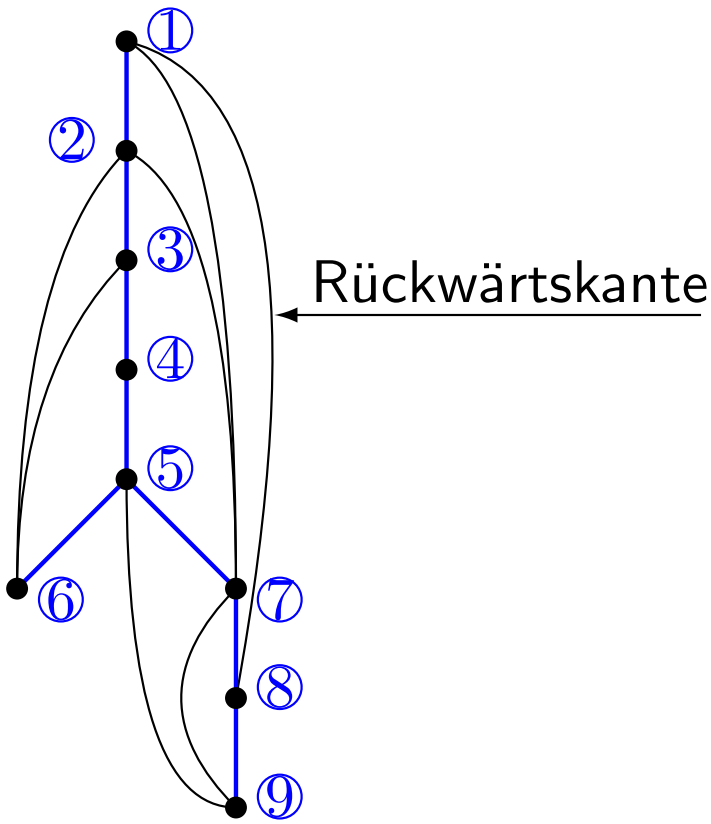
while $\exists$ unvisited v **do**
    $r :=$ pick (random) unvisited node
    push r onto stack
    while stack $\neq \emptyset$ **do**
        $v :=$ pop top element
        if v unvisited **then**
            mark v visited
            push all neighbours of v onto stack
            perform operations DFS_Ops(v)
        fi
    od
od

Beispiel 97



Beobachtung: Die markierten Kanten bilden einen Spannbaum:

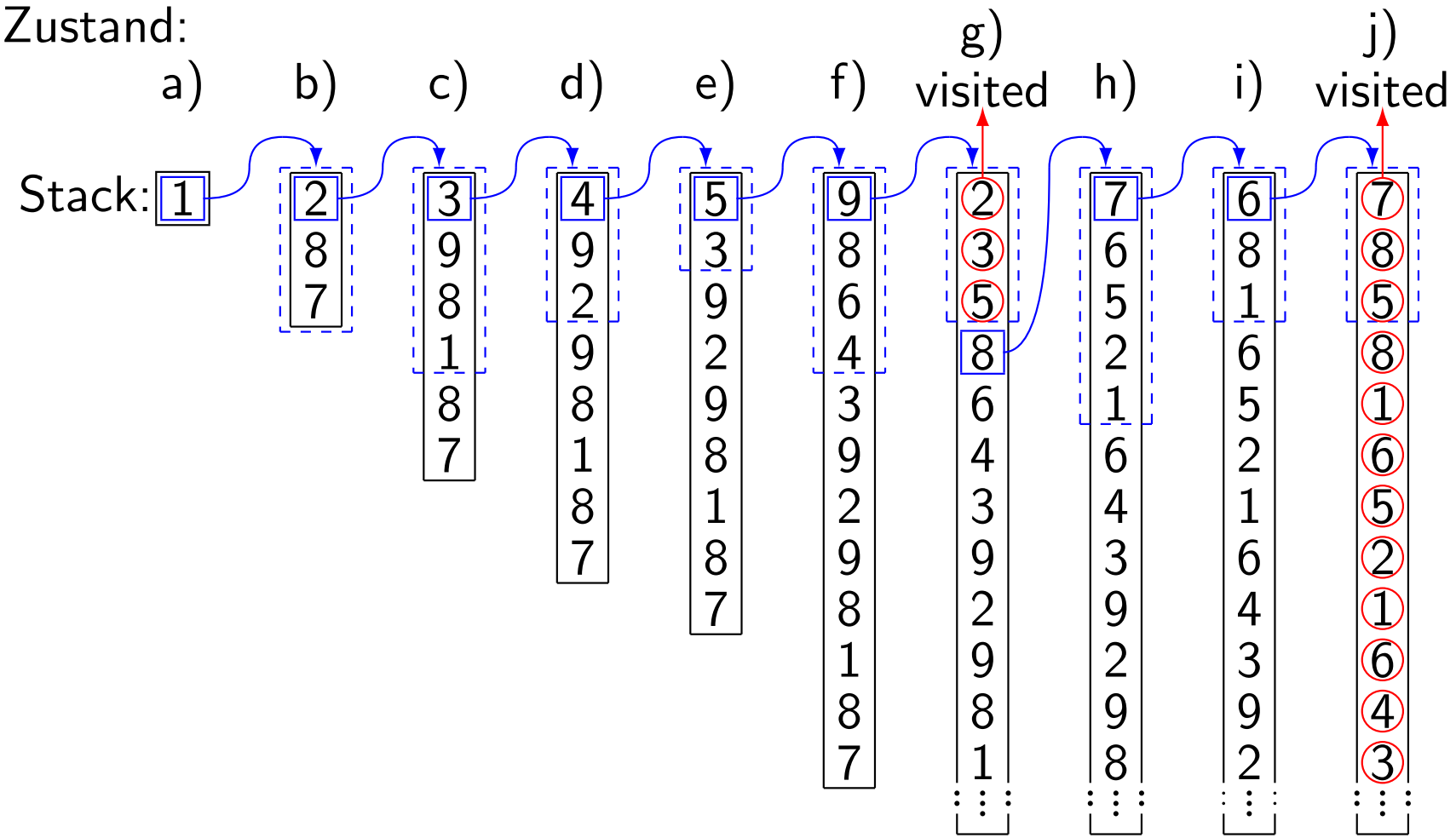




Folge der Stackzustände

: oberstes Stackelement : Nachbarn

: schon besuchte Knoten

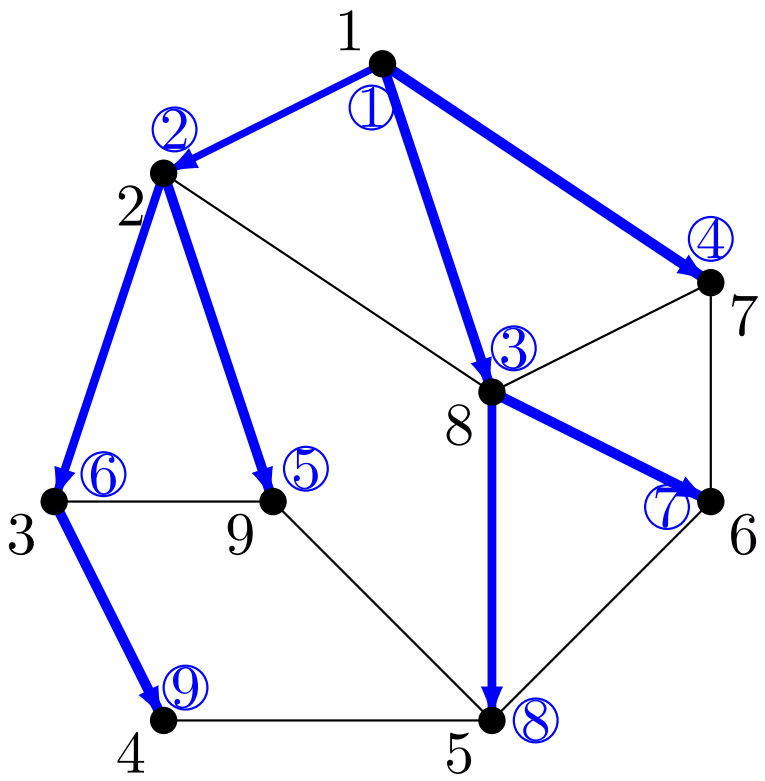


Wir betrachten den Stackzustand:
Im Zustand g) sind die Elemente 2, 3 und 5 als visited markiert (siehe Zustände b), c) und e)). Deswegen werden sie aus dem Stack entfernt, und das Element 8 wird zum obersten Stackelement. Im Zustand j) sind alle Elemente markiert, so dass eins nach dem anderen aus dem Stack entfernt wird.

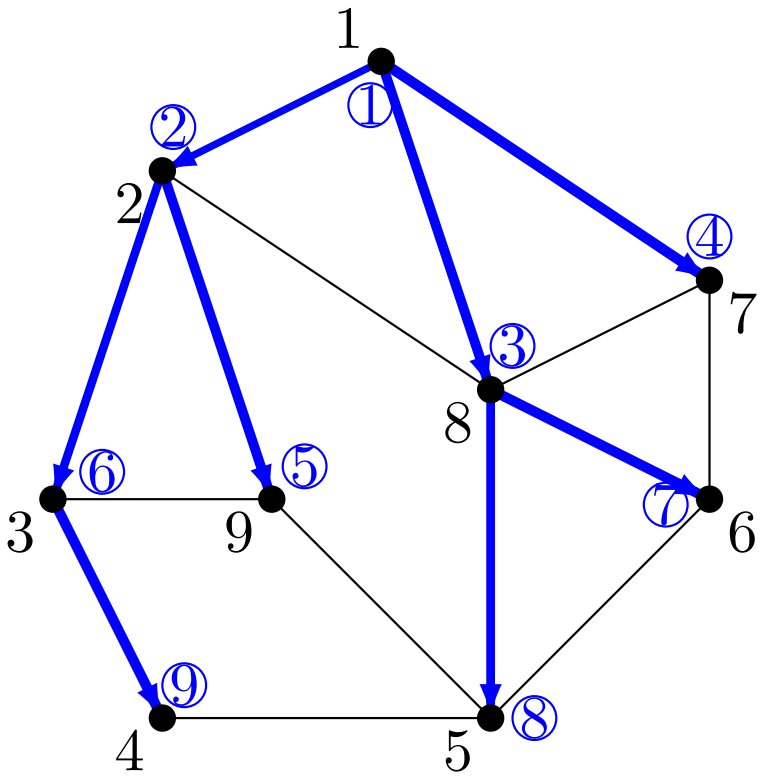
2.2 BFS-Algorithmus

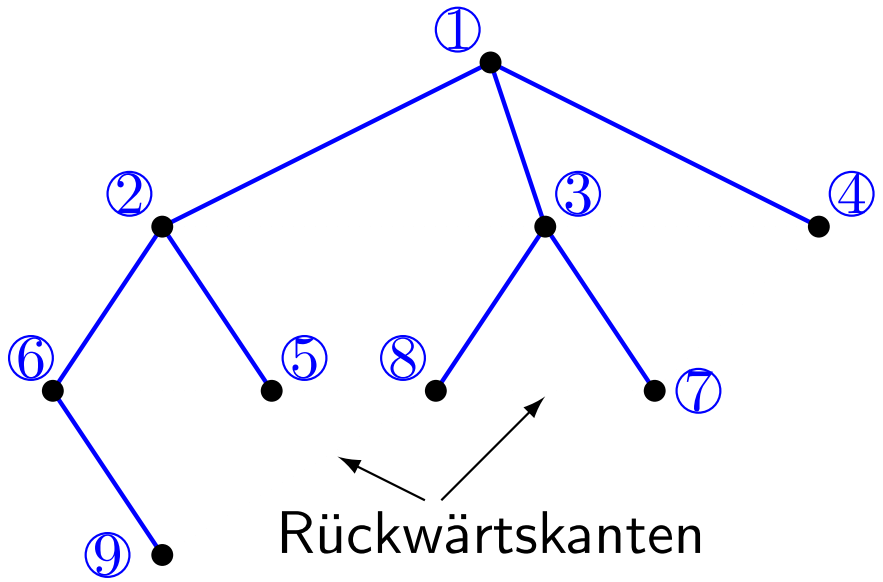
while $\exists$ unvisited v **do**
    $r :=$ pick (random) unvisited node
    push r into (end of) queue
    while queue $\neq \emptyset$ **do**
        $v :=$ remove front element of queue
        if v unvisited **then**
            mark v visited
            append all neighbours of v to end of queue
            perform operations BFS_Ops(v)
        fi
    od
od

Beispiel 98

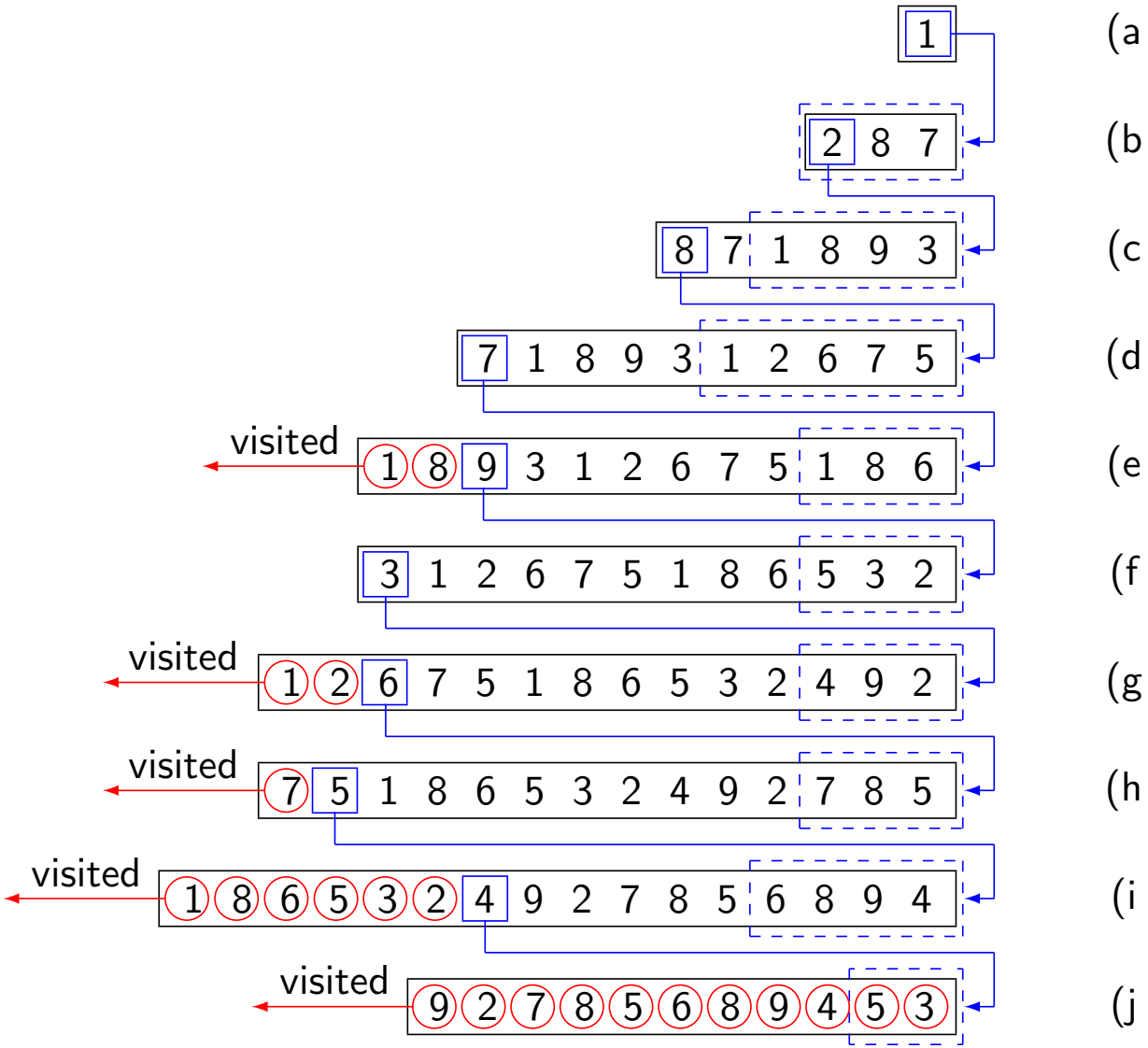


Beobachtung: Die markierten Kanten bilden einen Spannbaum:





Folge der Queuezustände



Wir betrachten die Folge der Queuezustände. Wiederum bedeutet die Notation:

 : vorderstes Queue-Element

 : schon besuchte Knoten

 : Nachbarn

Im Zustand e) sind die Elemente 1 und 8 als visited markiert (siehe Zustände a) und c)). Deswegen werden sie aus der Queue entfernt, und so wird das Element 9 das vorderste Queueelement. Das gleiche passiert in den Zuständen g), h) und i). Im Zustand j) sind alle Elemente markiert, so dass sie eins nach dem anderen aus der Queue entfernt werden.

3. Minimale Spannbäume

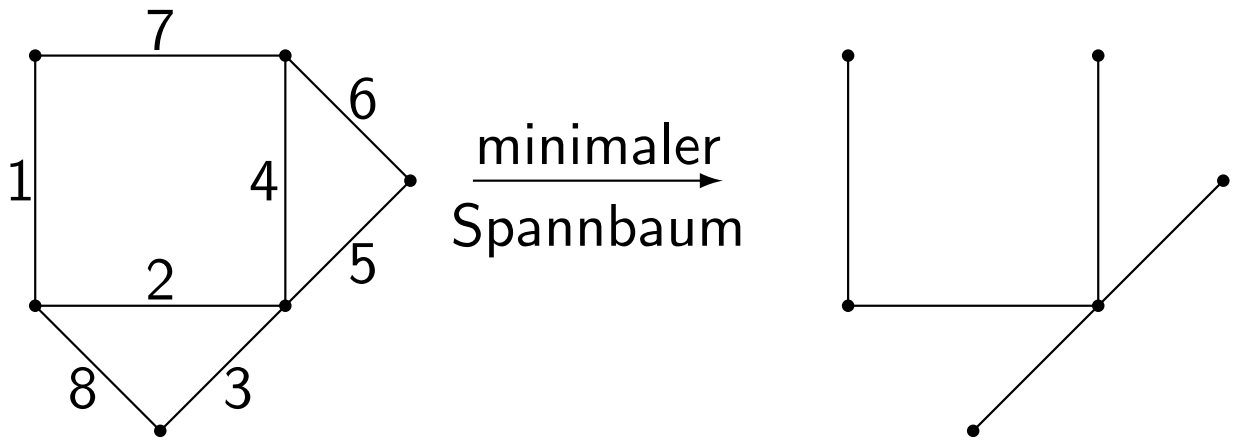
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph, der o.B.d.A. zusammenhängend ist. Sei weiter $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion auf den Kanten von G.
Wir setzen

- $E' \subseteq E$: $w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$,
- $T = (V', E')$ ein Teilgraph von G: $w(T) = w(E')$.

Definition 99
T heißt minimaler Spannbaum (MSB, MST) von G, falls T Spannbaum von G ist und gilt:

$$w(T) \leq w(T') \text{ für alle Spannbäume } T' \text{ von } G.$$

Beispiel 100



Anwendungen:

- Telekom: Verbindungen der Telefonvermittlungen
- Leiterplatinen

3.1 Konstruktion von minimalen Spannbäumen

Es gibt zwei Prinzipien für die Konstruktion von minimalen Spannbäumen (Tarjan):

- „blaue“ Regel
- „rote“ Regel

Satz 101

*Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph, $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion, $C = (V_1, V_2)$ ein Schnitt (d.h. $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$). Sei weiter $E_C = E \cap (V_1 \times V_2)$ die Menge der Kanten „über den Schnitt hinweg“. Dann gilt: (**„blaue“ Regel**)*

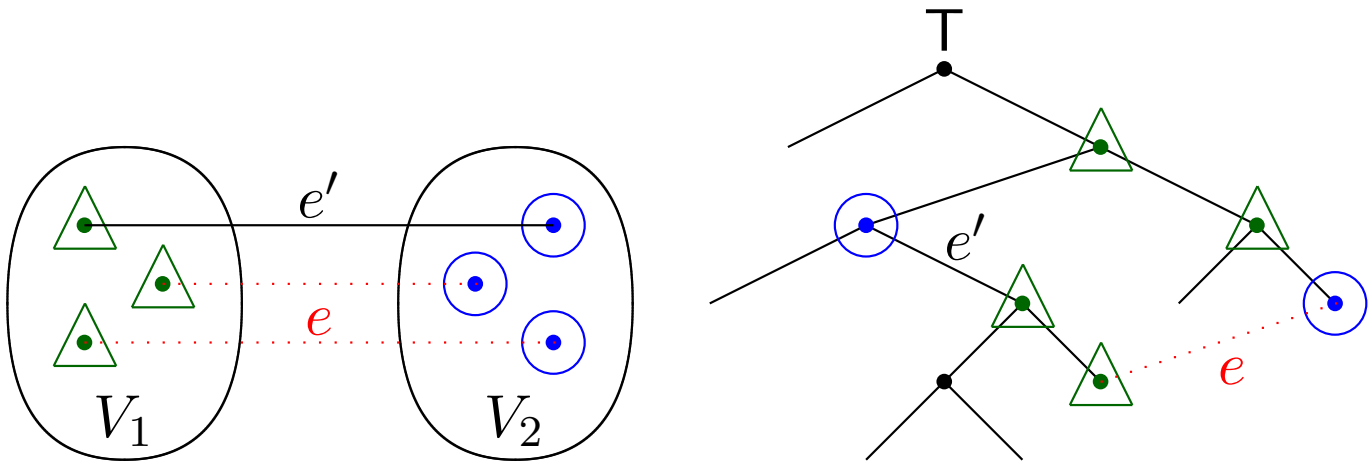
1. *Ist $e \in E_C$ die einzige Kante minimalen Gewichts (über alle Kanten in E_C), dann ist e in jedem minimalen Spannbaum für (G,w) enthalten.*
2. *Hat $e \in E_C$ minimales Gewicht (über alle Kanten in E_C), dann gibt es einen minimalen Spannbaum von (G,w), der e enthält.*

Beweis:

[durch Widerspruch]

1. Sei T ein minimaler Spannbaum von (G, w), sei $e \in E_C$ die minimale Kante. Annahme: $e \notin T$. Da T Spannbaum $\Rightarrow T \cap E_C \neq \emptyset$.
   Sei $T \cap E_C = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, $k \geq 1$. Dann enthält $T \cup \{e\}$ einen eindeutig bestimmten Kreis (den sogenannten durch e bzgl. T bestimmten Fundamentalkreis). Dieser Kreis muss mindestens eine Kante $\in E_C \cap T$ enthalten, da die beiden Endpunkte von e auf verschiedenen Seiten des Schnitts C liegen.

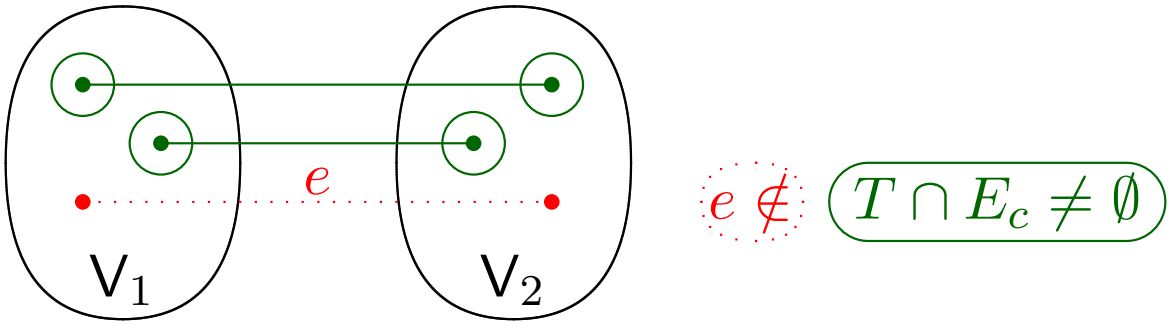
Beweis (Forts.):



Sei $e' \in E_C \cap T$. Dann gilt nach Voraussetzung $w(e') > w(e)$. Also ist $T' := T - \{e'\} \cup \{e\}$ ein Spannbaum von G, der echt kleineres Gewicht als T hat, Widerspruch zu „T ist minimaler Spannbaum“.

Beweis (Forts.):

2. Sei $e \in E_C$ minimal. Annahme: e kommt in keinem minimalen Spannbaum vor. Sei T ein beliebiger minimaler Spannbaum von (G, w).



$e \notin T \cap E_C \neq \emptyset$. Sei $e' \in E_C \cap T$ eine Kante auf dem durch e bezüglich T erzeugten Fundamentalkreis. Dann ist $T' = T - \{e'\} \cup \{e\}$ wieder ein Spannbaum von G, und es ist $w(T') \leq w(T)$. Also ist T' minimaler Spannbaum und $e \in T'$.

□

Satz 102

*Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, gewichteter, zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$. Dann gilt: (**„rote“ Regel**)*

1. *Gibt es zu $e \in E$ einen Kreis C in G, der e enthält und $w(e) > w(e')$ für alle $e' \in C \setminus \{e\}$ erfüllt, dann kommt e in keinem minimalen Spannbaum vor.*
2. *Ist $C_1 = e_1, \ldots, e_k$ ein Kreis in G und $w(e_i) = \max\{w(e_j);\ 1 \leq j \leq k\}$, dann gibt es einen minimalen Spannbaum, der e_i nicht enthält.*

Beweis:

1. Nehmen wir an, dass es einen minimalen Spannbaum T gibt, der $e = \{v_1, v_2\}$ enthält. Wenn wir e aus T entfernen, so zerfällt T in zwei nicht zusammenhängende Teilbäume T_1 und T_2 mit $v_i \in T_i$, $i = 1, 2$. Da aber e auf einem Kreis in G liegt, muss es einen Weg von v_1 nach v_2 geben, der e nicht benützt. Mithin gibt es eine Kante $\hat{e} \neq e$ auf diesem Weg, die einen Knoten in T_1 mit T_2 verbindet. Verbinden wir T_1 und T_2 entlang $\hat{e}$, so erhalten wir einen von T verschiedenen Spannbaum $\hat{T}$. Wegen $w(\hat{e}) < w(e)$ folgt $w(\hat{T}) < w(T)$, im Widerspruch zur Minimalität von T.

Beweis (Forts.):

2. Wir nehmen an, e_i liege in jedem minimalen Spannbaum (MSB) von G, und zeigen die Behauptung durch Widerspruch.

   Sei T ein beliebiger MSB von G. Entfernen wir e_i aus T, so zerfällt T in zwei nicht zusammenhängende Teilbäume T_1 und T_2. Da e_i auf einem Kreis $C_1 = e_1, \ldots, e_k$ in G liegt, können wir wie zuvor e_i durch eine Kante e_j des Kreises C_1 ersetzen, die T_1 und T_2 verbindet. Dadurch erhalten wir einen von T verschiedenen Spannbaum $\tilde{T}$, der e_i nicht enthält. Da nach Voraussetzung $w(e_j) \leq w(e_i)$ gilt, folgt $w(\tilde{T}) \leq w(T)$ (und sogar $w(\tilde{T}) = w(T)$, da T nach Annahme ein MSB ist). Also ist $\tilde{T}$ ein MSB von G, der e_i nicht enthält, im Widerspruch zur Annahme, e_i liege in *jedem* MSB von G.

Literatur

Robert E. Tarjan:
Data Structures and Network Algorithms
SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Bd. 44 (1983)

3.2 Generischer minimaler Spannbaum-Algorithmus

Initialisiere Wald F von Bäumen, jeder Baum ist ein singulärer Knoten
(jedes $v \in V$ bildet einen Baum)
while Wald F mehr als einen Baum enthält **do**
    wähle einen Baum $T \in F$ aus
    bestimme eine leichteste Kante $e = \{v, w\}$ aus T heraus
    sei $v \in T$, $w \in T'$
    vereinige T und T', füge e zum minimalen Spannbaum hinzu
od