Überlegung: Jede k-Menge aus N ergibt $k!$ k-Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k-Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k-Mengenpartitionen (Die Klassen sind (beliebig) *untereinander* geordnet, aber nicht *in* sich!).

2. Zahlpartitionen

Eine geordnete Zahlpartition ist gegeben durch

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k; \quad n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:

$$\underbrace{\bullet | \bullet | \bullet | \bullet \cdots \bullet | \bullet | \bullet | \bullet}_{n}$$

Wähle aus den $n-1$ Trennstellen $k-1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k-Zahlpartition und umgekehrt.

Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

4.3 Multimengen

Beispiel 169

$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \qquad |M| = 7$

Satz 170

Die Anzahl der k-Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $N = \{1, \ldots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ der Kardinalität k. Sei o.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Definiere die Ersetzung f:

$$f: \quad \begin{array}{ccll} a_1 & & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & & a_2 + 1 & \\ a_3 & & a_3 + 2 & \\ \vdots & \longmapsto & \vdots & \\ a_k & & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter f ist eine *Menge* $\subseteq [n + k - 1]$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. $\square$

Andere Beweisvariante:

Beweis:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & & 0 & 2 & & & & & 1 & & 0 \\
\circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \cdots & \circ & \bullet & \circ \\
1 & 2 & & 3 & 4 & & & & & n-1 & & n
\end{array}$$

Von $n+k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). $\square$

Beispiel 171

Darstellung zu obigem Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & & 2 & & & 3 & & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$$

4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (Urbildraum) nach R (Bildraum), $|N| = n, |R| = r$ mit $n, r \in \mathbb{N}_0$.
Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^n \ .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \to R$ ist

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to R$ („geordnete r-Mengenpartitionen von N“) ist

$$r! \cdot S_{n,r} .$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\ .
\end{aligned}
$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv $(n = r)$
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.6 Abzählen von Permutationen

4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

Definition 172

Die Stirling-Zahl der ersten Art

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Zyklen an.

Einfache Beobachtungen:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$