Beweis:

Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit n Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an.

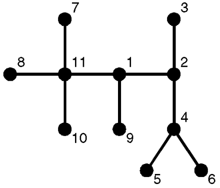
(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
  $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
  $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
  $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 277



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
    $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset$; $T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $b := \min\limits_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
    `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
    $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

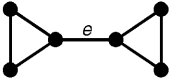
$\square$

2.13 Brücken

Definition 278

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

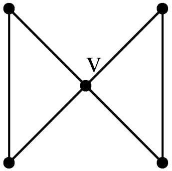
Beispiel 279



Beobachtung:

Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)
Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 280

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathrm{d}(u, v) := k$$

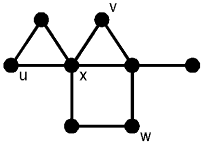
der Abstand von u und v in G.

Wir setzen $\mathrm{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$\mathsf{D}(G) := \max\{\mathrm{d}(u, v); u, v \in V\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel 281



$d(u,v) = 2$, $d(u,w) = 3$, $d(u,x) = 1$, $\mathsf{D}(G) = 3$.

Beobachtung:

d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 282

Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Beobachtungen:

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

Satz 283

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$A^0 := I,$$
$$A^{i+1} := A^i \cdot A \qquad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dann gilt für

$$A^k = \left({a_{ij}}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} :$$

${a_{i,j}}^{(k)}$ ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j.

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:

Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$

${a_{il}}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l.

Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} {a_{il}}^{(k)} \cdot a_{lj} = {a_{ij}}^{(k+1)}$$

$\square$

Bemerkung:

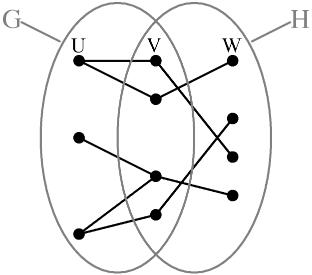
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

Definition 284

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0, 1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

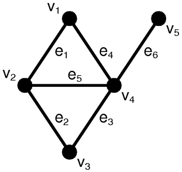
Definition 285

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

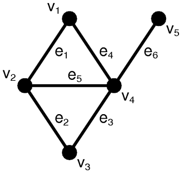
Beispiel 286 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} + A$$

3. Definitionen für gerichtete Graphen

3.1 Digraph

Definition 287

Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

3.2 Grad

Definition 288

- $\mathrm{d}^-(v)$ ist der Aus-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten v.
- $\mathrm{d}^+(v)$ ist der In-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten v.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von v.

Beobachtung:

$$\sum_{v\in V} \mathrm{d}^{-}(v) = \sum_{v\in V} \mathrm{d}^{+}(v) = |A|$$

3.3 Adjazenzmatrix

Definition 289

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = \left(c_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Falls G schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von C gleich 0.

3.4 Inzidenzmatrix

Definition 290

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & 0 \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle i, j, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu G gehörigen ungerichteten Graphen zwischen v_i und v_j verlaufenden Kanten. Enthält G keine antiparallelen Kanten, ist damit A' gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

Beobachtung: Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.

3.5 Gerichteter Pfad

Definition 291

Eine Folge $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in V$ für $i = 0, \ldots, n$ heißt gerichteter Pfad, wenn

$$(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})\Big[(u_i, u_{i+1}) \in A\Big].$$

Ein gerichteter Pfad heißt einfach, falls alle u_i paarweise verschieden sind.

3.6 Gerichteter Kreis

Definition 292

Ein gerichteter Pfad $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ heißt gerichteter Kreis, wenn $u_0 = u_n$.
Der gerichtete Kreis heißt einfach, falls $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ alle paarweise verschieden sind.

3.7 dag

Definition 293

Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt *directed acyclic graph*, kurz dag.

In einem dag heißen Knoten mit In-Grad 0 Quellen, Knoten mit Aus-Grad 0 Senken.

Eine Nummerierung $i : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ der Knoten eines *dags* heißt topologisch, falls für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt:

$$i(u) < i(v).$$

Beispiel 294