SS 2011

Zentralübung Diskrete Strukturen (zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/uebung/

13. September 2011

ZÜ IV

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?
2. Themen:

   Arbeitsblatt 2: Ungeordnete Zahlpartitionen.
   Klassifizierung von Zählproblemen
   Rationale Funktionen
3. Vorbereitung TA's Blatt 5:

   Zählung von Äquivalenzrelationen (VA 1)
   Weitere Zählprobleme (VA 2 – VA 5)
   Differenzenoperatoren(VA 6)
   Partielle Summation(VA 7)
   Binomialinversion (VA 8)

1. Übungsbetrieb

1.1 Fragen, Probleme?

?

2. Themen

2.1 Arbeitsblatt 2: Ungeordnete Zahlpartitionen

Siehe Übungswebseite.

2.1.1 Begriffe

Unterscheidbarkeit, Multimengen, Zuordnung von Multimengen.

2.1.2 Aufgaben

Studium von Zahlpartitionen.

Grundlage auch für Hausaufgaben.

2.2 Klassifizierung von Zählproblemen

In der Vorlesung wurde mit der folgenden Tabelle die Basis für eine Klassifizierung kombinatorischer Aufgabenstellungen und Lösungen geschaffen.

Die Formeln der Tabelle gelten für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Wir schreiben für Mengen oder Multimengen X jeweils

$X\{\neq\}$ bzw. $X\{=\}$, falls X aus

unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S_{n,r}$	$r! = n!$
$B: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

Wir wollen die Tabelle insbesondere zur Klassifizierung der Lösungen für Vorbereitungsaufgaben 1 und 3 verwenden.

2.3 Rationale Funktionen

2.3.1 Rationale Ausdrücke

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

2.3.2 Rationale Funktionen

Ganze rationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Gebrochene rationale Funktionen

Definitionsbereiche mit ,,endlich vielen Ausnahmen".

Siehe Vorbereitungsaufgabe 6!

3. Vorbereitung TA's Blatt 5

3.1 VA 1, Zählen von Relationen und Mengen

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!

Lösung:

Äquivalenzrelationen sind durch
die Menge ihrer zugeordneten Äquivalenzklassen bestimmt.

Über der Grundmenge M mit 3 Elementen gibt es

Äquivalenzrelationen

- mit 3 Klassen,
- mit 2 Klassen und
- mit einer einzigen Klasse.

Die Menge der zugeordneten Klassen bildet
eine Partition P der Grundmenge M.

Äquivalenzrelationen mit
1 Klasse: $P_{1,1} = \{\{0,1,2\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
2 Klassen: $P_{2,1} = \{\{0\},\{1,2\}\}$.
$P_{2,2} = \{\{1\},\{0,2\}\}$.
$P_{2,3} = \{\{2\},\{1,0\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
3 Klassen: $P_{3,1} = \{\{1\},\{2\},\{0\}\}$.

2. Wie viele Partitionen gibt es über M?

Lösung:

Die Partitionen entsprechen eineindeutig den Äquivalenzrelationen.

Also gibt es 5 Partitionen über M.

3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?

Lösung:

Falls $M = \emptyset$,
dann ist $R = \emptyset$ eine Äquivalenzrelation über M.

Aus $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ folgt,
dass $\emptyset$ die einzige Relation über $\emptyset$ ist.

Die Menge der Klassen dieser Relation R ist leer.
Damit entspricht die leere Menge von Klassen in diesem Fall einer (einzigen) Partition von M.

4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?

Lösung:

Damit f surjektiv ist, muss $\{k_1, k_2\}$ mit $k_1 := f^{-1}(1)$ und $k_2 := f^{-1}(2)$ eine 2-elementige Partition über M bilden.

Also kommen nur
die Partitionen $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ und $P_{2,3}$ für $\{k_1, k_2\}$ in Frage.

Für die Zuordnung der Urbildklassen k_1, k_2 zu den Klassen der Partitionen $P_{i,j}$ gibt es nun stets 2 Möglichkeiten.

Deshalb erhalten wir insgesamt 6 surjektive Abbildungen.

5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?

Lösung:

Eine injektive Operation über einer endlichen Menge M ist gleichzeitig surjektiv und damit bijektiv.

Für die Abbildung von 0 gibt es 3 Möglichkeiten.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es dann 2 Möglichkeiten der Abbildung des Elementes 1.

Damit erhalten wir $2 \cdot 3 = 6$ injektive Operationen über M.

6. Geben Sie alle Variationen von M an!

In der Vorlesung haben wir dafür k-Permutation gesagt.
D.h., die Begriffe k-Variation und k-Permutation sind synonym.

Lösung:

Eine k-Variation (k-Permutation) einer Menge A wurde als Sequenz $q_1, q_2, \ldots, q_k$ der Länge k von paarweise verschiedenen Elementen q_i aus A definiert.

Eine k-Variation mit $k = |A|$ wird Permutation von A genannt.

Wir ordnen jeder Variation $q_1, q_2, \ldots, q_k$ über einer endlichen Menge A in eineindeutiger Weise eine bijektive Abbildung $f : [1, k] \to A$ wie folgt zu

$$f(i) = q_i\,.$$

Fall $k = 3$ (Permutationen):

Wir erhalten die folgenden 6 Abbildungen $f_1, f_2, \ldots, f_6$.

	1	2	3
f_1	0	1	2
f_2	0	2	1
f_3	1	0	2
f_4	1	2	0
f_5	2	0	1
f_6	2	1	0

Fall $k = 2$:

Wir erhalten die folgenden 6 Abbildungen $r_1, r_2, \ldots, r_6$.

	1	2
r_1	0	1
r_2	0	2
r_3	1	0
r_4	1	2
r_5	2	0
r_6	2	1

Fall $k = 1$:

Wir erhalten die folgenden 3 Abbildungen s_1, s_2, s_3. (gespiegelte Liste).

	s_1	s_2	s_3
1	0	1	2

Fall $k = 0$:

Wir erhalten die leere Sequenz bzw. leere Abbildung als einzige Variation der Länge 0.

Wir bestimmen nun für die Vorbereitungsaufgaben 1, mit welchen Formeln der Klassifizierungstabelle diese Aufgaben gelöst werden können.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A:\quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! S_{n,r}$	$r! = n!$
$B:\quad N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C:\quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D:\quad N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

Wir begründen die Zuordnung, indem wir jeweils Multimengen N und R in Verbindung mit dem entprechenden Abbildungstyp angeben.

Über M entsprechen Äquivalenzrelationen eineindeutig den Partitionen.

Wir bezeichnen für VA 1.1 die Anzahl der Äquivalenzrelationen über M mit k Klassen mit $anz_{\textsf{\textit{ÄquRel}}}(M,k)$.

Dann gilt $anz_{\textsf{\textit{ÄquRel}}}(M,k) = S_{|M|,k}$.

Die gesamte Anzahl von Äquivalenzrelationen bzw. Partitionen über M mit $|M| = n$ bezeichnet man als Bell'sche Zahl oder Bellzahl B_n.

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 1.1:	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,1) = 1$	C3$= S_{3,1}$	$N\{\neq\} = M$,	$\|R\{=\}\| = 1$
	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,2) = 3$	C3$= S_{3,2}$	$N\{\neq\} = M$,	$\|R\{=\}\| = 2$
	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,3) = 1$	C3$= S_{3,3}$	$N\{\neq\} = M$,	$\|R\{=\}\| = 3$
VA 1.2:	$B_3 = 5$	C1	$N\{\neq\} = M$,	$\|R\{=\}\| = 3$
VA 1.3:	$B_0 = 1$	C1	$N\{\neq\} = \emptyset$,	$\|R\{=\}\| = 0$

Bei VA 1.4 bezeichnen wir die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M auf $M' = \{1, 2\}$ mit $anz_{surj}(M, M')$.

Eine injektive Operation über M ist gleichzeitig eine Permutation von M und umgekehrt (VA 2.5).

Bei VA 1.6 bestimmen wir die Anzahl $anz_{Var}(M, k)$ der Variationen der Länge k für $k = 0, 1, 2, 3$.

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 1.4:	$anz_{surj}(M, M') = 6$	A3	$N\{\neq\} = M$,	$R\{\neq\} = M'$
VA 1.5:	$anz_{inj}(M, M) = 6$	A4	$N\{\neq\} = M$,	$R\{\neq\} = M$
VA 1.6:	$anz_{Var}(M, 3) = 6$	A2$= 3^{\underline{3}}$	$N\{\neq\} = [3]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 2) = 6$	A2$= 3^{\underline{2}}$	$N\{\neq\} = [2]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 1) = 3$	A2$= 3^{\underline{1}}$	$N\{\neq\} = [1]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 0) = 1$	A2$= 3^{\underline{0}}$	$N\{\neq\} = \emptyset$,	$R\{\neq\} = M$

3.2 VA 3

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechnern rayhalle1, rayhalle2 bis rayhalle m ein, um die neuen Übungsaufgaben zu lesen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird,

1. *welcher* Student auf *welchem* Rechner eingeloggt ist,
2. *wie viele* Studenten auf *welchem* Rechner eingeloggt sind,
3. *welche* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,
4. *wie viele* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,

und wie hängen die Antworten jeweils davon ab, ob auf jedem Rechner

- höchstens
- mindestens
- genau

ein Student eingeloggt ist.

Lösung:

Wir bezeichnen die n-elementige Struktur der Studenten mit St_n und die m-elementige Struktur der Rechner mit Rch_m.
Das Einloggen eines Studenten s in einen Rechner r entspricht der Zuordnung $s \to r$.

Wir gehen davon aus, dass diese Zuordnung rechtseindeutig ist, d. h., dass ein Student sich in einem betrachteten Zeitpunkt nur an einem einzigen Rechner einloggen können soll. (Man könnte auch andere Interpretationen untersuchen.)

Dann ist die Aufgabenstellung nichts anderes, als die Frage nach der Klassifizierung X_i von Zuordnungen nach der Tabelle aus VA 1.

Strukturen:

A: St_n und Rch_m sind Mengen, d.h. die Elemente (Studenten bzw. Rechner) sind unterscheidbar.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „welcher Student auf welchem Rechner eingeloggt ist“.

B: St_n ist eine Multimenge von n gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Elementen und Rch_m ist eine Menge.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „wie viele Studenten auf welchem Rechner eingeloggt sind“.

C: St_n ist eine Menge von unterscheidbaren Studenten und Rch_m ist eine Multimenge von m gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Rechnern.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „welche Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind".

D: St_n ist eine Multimenge von n gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Studenten, und Rch_m ist eine Multimenge von m gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Rechnern.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „wie viele Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind".

Abbildungstypen:

$T1$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig, ansonsten beliebig.

$T2$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und injektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „höchstens ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

$T3$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und surjektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „mindestens ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

$T4$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und bijektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „genau ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

Die Anzahl der Zuordnungen unter Beachtung der Bedingung X und des Typs i ergibt sich aus der Tabelle von VA 1.

3.3 VA 2, Zählen von Wörtern

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine dieser Art gibt es?

Lösung:

Die Punktezahlen auf den beiden Quadraten eines Dominosteines bilden eine 2-elementige Multiteilmenge der Menge $[7] \in \mathbb{N}$.

Nach Formel für die Anzahl $\text{anz}_M M(2,7)$ von 2-elementigen Multiteilmengen einer 7-elementigen Menge gilt

$$\text{anz}_{MM}(2,7) = \binom{7+2-1}{7-1} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28\,.$$

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   MINIMALISIERUNG

   bilden lassen.

   Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Lösung:

Das gegebene Wort hat 15 Buchstabenvorkommen mit den folgenden Vielfachheiten:
A - 1, E - 1, G - 1, I - 4, L - 1, M - 2, N - 2, R - 1, S - 1, U - 1.

Würden alle Buchstabenvorkommen zu verschiedenen Buchstaben gehören (d. h. unterscheidbar sein), dann gäbe es $15!$ verschiedene Wörter.

Allerdings sind jeweils $4! \cdot 2! \cdot 2!$ der Wörter gleich, weil sie sich nur durch Vertauschung gleicher Buchstabenvorkommen zu I, M bzw. N ergeben.

Damit ergibt sich die Anzahl der verschiedenen Wörter mit

$$\frac{15!}{4!2!2!} = 13621608000\,.$$

3.4 VA 4, Binomialkoeffizienten

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von $x^3y^2z^2$ und x^2z^3 in $(x + xy + z)^5$.

Lösung:

Wir führen eine Klammerung ein und benutzen die Binomische Formel.

$$(x + xy + z)^5 = ((x + xy) + z)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (x + xy)^{5-k} \cdot z^k$$

Koeffizient von $x^3y^2z^2$:

Es ist der Summand für $k = 2$ zu betrachten.

$$\binom{5}{2}(x + xy)^3 z^2 \quad = \quad \binom{5}{2} z^2 \cdot \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} x^{3-i}(xy)^i$$

Der gesuchte Koeffizient C ergibt sich aus dem Summanden für $i = 2$ wie folgt.

$$C = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30\,.$$

Koeffizient von x^2z^3:

Es ist der Summand für $k = 3$ zu betrachten.

$$\binom{5}{3}(x+xy)^2 z^3 \quad = \quad \binom{5}{3} z^3 \cdot \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} x^{2-i}(xy)^i$$

Der gesuchte Koeffizient C ergibt sich aus dem Summanden für $i = 0$ wie folgt.

$$C = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{0} = 10\,.$$

3.5 VA 5

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Lösung:

In dieser Aufgabe treten erstmalig Nebenbedingungen auf, deren Beachtung vorbereitende Überlegungen erfordern.

9 Züge benötigen minimal 17 Gleise, wenn man sie möglichst dicht aufeinanderfolgen läßt, denn zwischen den Zügen müssen sich mindestens 8 Gleise befinden.

An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$-elementigen Multiteilmengen einer $r = 10$-elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{\overline{13}}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420\,.$$

3.6 VA 6

Sei F die Menge aller Abbildungen einer Menge M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir definieren für alle $f \in F$ und $g \in F$

die Summe, i. Z. $f + g$, bzw. das Produkt, i. Z. $f \cdot g$,

als diejenigen komplexwertigen Funktionen h bzw. k, für die für alle $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} h(x) = (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \\ k(x) = (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend führen wir über der Menge $F \to F$ der Operatoren über F Addition und Multiplikation wie folgt ein.

Für alle $A, B : F \to F$ und $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned}(A + B)(f) &= A(f) + B(f) \quad \text{bzw.}\\ (A \cdot B)(f) &= A(f) \cdot B(f)\,.\end{aligned}$$

Beispiele für Operatoren über F sind
sowohl der Translationsoperator E
als auch der Differenzenoperator Δ.

Man zeige:

1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}$.

   Beweis!

Lösung:

Für die steigende Fakultät gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\overline{g}} \cdot (x+g) = x^{\overline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x+1)^{\overline{g}} = x^{\overline{g+1}}\,.$$

Für die fallende Fakultät gelten für alle ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ entsprechend die beiden fundamentalen Gleichungen

$$x^{\underline{g}} \cdot (x-g) = x^{\underline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x-1)^{\underline{g}} = x^{\underline{g+1}}\,.$$

Die Ausdrücke auf den Gleichungsseiten sind i. A.

Quotienten von polynomiellen Ausdrücken,

und stellen Elemente dar (sog. Brüche von Polynomen) aus dem

Quotientenkörper $\mathbb{C}(x)$ über dem Polynomring $\mathbb{C}[x]$

Diese Ausdrücke definieren gleichzeitig

rationale Funktionen aus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

die man durch Einsetzen in x und Auswertung der Ausdrücke erhält.

Übersicht:

Steigende Fakultät:

$n > 0$: $\quad x^{\overline{n}} = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+n-1)\,,$

$n = 0$: $\quad x^{\overline{n}} = 1\,,$

$n < 0$: $\quad x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x+n)\cdot(x+(n+1))\cdot\ \ldots\ \cdot(x-2)\cdot(x-1)}\,.$

Fallende Fakultät:

$n > 0$: $\quad x^{\underline{n}} = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-(n-1))\,,$

$n = 0$: $\quad x^{\underline{n}} = 1\,,$

$n < 0$: $\quad x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x-n)\cdot(x-(n+1))\cdot\ \ldots\ \cdot(x+2)\cdot(x+1)}\,.$

Wegen

$$x^{\overline{g}} \cdot (x+g) = x^{\overline{g+1}} \qquad \text{und} \qquad x \cdot (x+1)^{\overline{g}} = x^{\overline{g+1}}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\overline{n}} &= (x+1)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}} \\
&= (x+1)^{\overline{n-1}} \cdot (x+1+n-1) \;-\; x \cdot (x+1)^{\overline{n-1}} \\
&= (x+n)(x+1)^{\overline{n-1}} - x \cdot (x+1)^{\overline{n-1}} \\
&= n(x+1)^{\overline{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Man zeige:

2. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\qquad \nabla x^{\underline{n}} = n(x-1)^{\underline{n-1}}$.

   Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$
   zusammen mit Lemma 203 für den Beweis!

Lösung:

In Lemma 203 wurde die Gleichung

$$\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$$

bewiesen.

Es folgt mit Operatorenrechnung

$$\begin{aligned}
\nabla x^{\underline{n}} &= (E^{-1}\Delta) x^{\underline{n}} \\
&= E^{-1}(\Delta x^{\underline{n}}) \\
&= E^{-1}(n x^{\underline{n-1}}) \\
&= n(x-1)^{\underline{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Man zeige:

3. Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$.

   Beweis!

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
[[\nabla\Delta](f)](x) &= [\nabla(\Delta(f))](x)\\
&= [\Delta(f)](x) - [\Delta(f)](x-1)\\
&= (f(x+1) - f(x)) - (f((x-1)+1) - f(x-1))\\
&= (f(x+1) - f((x+1)-1)) - (f(x) - f(x-1))\\
&= [\nabla(f)](x+1) - [\nabla(f)](x)\\
&= [\Delta(\nabla(f))](x)\\
&= [[\Delta\nabla](f)](x)\,.
\end{aligned}$$

3.7 VA 7

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k \,.$$

Lösung:

Wir spezialisieren die Formel der Partiellen Summation wie folgt.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot \Delta g(k) = [f(k) \cdot g(k)]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) \cdot g(k+1)$$

Man setzt nun $f(k) = k$, $\Delta g(k) = 2^k$.
Damit gilt $\Delta f(k) = 1$, $g(k) = 2^k$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k &= \left[k \cdot 2^k\right]_1^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 2^{k+1} \\
&= \left[(n+1) \cdot 2^{n+1} - 2\right] - 4 \cdot (2^n - 1) \\
&= (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2\,.
\end{aligned}$$

3.8 VA 8

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \qquad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Lösung:

Wir machen den Ansatz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{k,i} = \delta_{n,i}$$

mit noch zu bestimmenden $b_{k,i}$.

Binomialinversion (siehe Vorlesung) liefert

$$b_{n,i} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \delta_{k,i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i}.$$