SS 2011

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

19. Mai 2011

ZÜ II

Übersicht:

1. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen
2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben Blatt 3

1. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

1.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1}$$

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \tag{2}$$

Achtung:

1. Falls für paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ die folgende Gleichung gilt

$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n]\,, \tag{3}$$

dann gilt nicht notwendigerweise auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]\,. \tag{4}$$

Aber:

2. Falls n Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Variablen $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \ldots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}] .$$

Insbesondere sind dann für beliebige $x_1, \ldots, x_n$ die Ereignisse

$$A_1 = („X_1 = x_1“), \ \ldots \ , \ A_n = („X_n = x_n“)$$

unabhängig.

Nun kündigen wir einen Satz an,
den wir als Hausaufgabe auf Blatt 4 beweisen werden und der die Unabhängikeit von Ereignissen und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen in Zusammenhang bringt.

Zuvor aber die

Definition der Indikatorvariablen (Vorlesung am 23.5.):

Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt die Abbildung

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Indikatorvariable des Ereignisses A.

Bezüglich des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes ist jede Indikatorvariable eine Zufallsvariable.

Satz:

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

Man beachte den Zusammenhang mit Lemma 23 !

1.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

VA 1, Blatt 2:

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis*!
- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i.

  Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$
  eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis*!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Konstruktion des Beispiels:

Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a + 1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$.

Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Wir haben nun die Partition

$$
\begin{aligned}
A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 = [9, 12]\,, \\
A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 = [13, 16]\,, \\
A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} = [1, 8]\,, \\
A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = [17, 24]\,.
\end{aligned}
$$

Seien
$B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$, $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.

Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion:

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit im 1. Schritt:

Im Fall einer einelementigen Menge von Ereignissen $\{A_1\}$ haben wir nur die Gleichung

$$\Pr\left[\bigcap_{A\in\{A_1\}} A\right] = \prod_{A\in\{A_1\}} \Pr[A]$$

zu beweisen.

Sie gilt trivialerweise.

Unabhängigkeit im $(k+1)$-ten Schritt:

Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω.

Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Lemma 23 der Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung

$$\Pr[A^s] = \prod_{i \in [k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

Falls $s_{k+1} = 1$,

dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr\left[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= p_{k+1} \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right].
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}\right]\\
&= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right]\\
&= (1-p_{k+1}) \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right]\\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right].
\end{aligned}$$

2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben Blatt 3

2.1 VA 1, Blatt 3

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$
   Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

Lösung:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X = n] \\
&= \sum_{n\geq 1} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

mithin

$$\mathbb{E}[X^2] = 66$$

und

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 30.$$

2. $Y :=$
   Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{21}{6}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 36 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{91}{6}$$

ist

$$\mathrm{Var}\,[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{35}{12}.$$

3. $Z :=$
   Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide 0 gezogen wurden.

Lösung:

Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit, dass in k Schritten genau ein O ausgewählt wird, bestimmt mit

$$\frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{k-1}}{\binom{6}{k}}\,.$$

Dann folgt

$$\mathbb{E}[Z] = 2 \cdot (\frac{2}{6}) \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \binom{2}{1}(\frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5}) \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \binom{3}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4}) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+5 \cdot \binom{4}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}) \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \binom{5}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}) = \frac{14}{3}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[Z^2] = 4 \cdot (\frac{2}{6}) \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \binom{2}{1}(\frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5}) \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \binom{3}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4}) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+25 \cdot \binom{4}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}) \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot \binom{5}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}) = \frac{70}{3}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{14}{9}.$$

2.2 VA 2, Blatt 3

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ einmal vorgekommen ist.
Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Lösung:

Das Experiment kann in 6 aufeinanderfolgende Phasen eingeteilt werden. In jeder Phase $i \in [6]$ werden Augenzahlen geworfen, die in vorausgegangenen Phasen schon einmal gewürfelt worden sind und zwar so lange, bis eine neue Augenzahl geworfen wird, die bisher noch nicht geworfen wurde. Dann genau ist die Phase i abgeschlossen.

Falls $i < 6$, dann fährt man man mit Phase $i + 1$ fort.

Wenn wir der Phase i eine Menge $g \subseteq [6]$ mit $|g| = i - 1$ zuordnen, dann läßt sich für Phase i die Ergebnismenge $\Omega = \{x_1 x_2 \ldots x_n \in [6]^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ zusammen mit der Teilmenge

$$\Omega_g = \{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z \in [6]^*\;;\; n \in \mathbb{N},\, x_k \in g,\, z \in ([6] \setminus g)\}$$

betrachten.

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ das Ereignis

$$E_n = \{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z \in [6]^* \,;\, x_k \in g,\, z \in ([6] \setminus g)\}$$

und ordnen ihm die folgende Wahrscheinlichkeit zu:

$$\Pr_g[E_n] \;=\; \left(\frac{|g|}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{6-|g|}{6} \;=\; \left(\frac{i-1}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{(i-1)}{6}\right).$$

Das Ereignis E_n bedeutet, dass wir $n-1$ mal eine in den früheren Phasen schon gewürfelte Augenzahl würfeln und beim n-ten Wurf eine bisher nicht gewürfelte Augenzahl erhalten.

Damit können wir für die Phase i eine Zufallsvariable $X_i : \Omega_g \to \mathbb{R}$ definieren, die jeweils die Anzahl n der Würfe in der Phase i ausgibt.

X_i ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1 - \frac{(i-1)}{6}$. Für Erwartungswert und Varianz folgt nach Vorlesung

$$\mathbb{E}[X_i] = p^{-1} = \frac{6}{6 - i + 1}$$

und

$$\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1 - p_i}{p_i^2} = \left(\frac{6}{6 - i + 1}\right)^2 \cdot \frac{(i-1)}{6}\,.$$

Da die Menge der X_i unabhängig ist, gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} p_i^{-1} = 6/6 + 6/5 + 6/4 + \cdots + 6/1 = 14.7$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{p_i^2} = 0 + \frac{5/6}{1/36} + \frac{4/6}{4/36} + \cdots + \frac{1/6}{25/36} = 38.99.$$

2.3 VA 3, Blatt 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2 \cdot \mathrm{Var}[X] + 2 \cdot \mathrm{Var}[Y]\,.$$

2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y) \cdot (X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Lösung:

Zur Lösung von Gleichungen, die Erwartungswert und Varianz enthalten, benötigt man die folgenden Beziehungen für Zufallsvariable $X, X_1, \ldots, X_n$ über demselben Wahrscheinlichkeitsraum, und beliebige $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + a_2 \mathbb{E}[X_2] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] \,.$$

Varianz als Differenz:

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \,.$$

Varianz affin transformierter Variablen:

$$\mathrm{Var}\,[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}\,[X] \,.$$

1

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Var}[X+Y]+\mathsf{Var}[X-Y]\\
&\quad= \mathsf{Var}[X+Y]+\mathsf{Var}[X-Y]\\
&\quad= \mathbb{E}[(X+Y)^2]-\mathbb{E}[X+Y]^2+\mathbb{E}[(X-Y)^2]-\mathbb{E}[X-Y]^2\\
&\quad= 2\mathbb{E}[X^2]+2\mathbb{E}[Y^2]-(2\mathbb{E}[X]^2+2\mathbb{E}[Y]^2)\\
&\quad= 2\cdot\mathsf{Var}[X]+2\cdot\mathsf{Var}[Y]\,.
\end{aligned}
$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$

und damit, mit Benützung der Linearität von $\mathbb{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y]\,.\end{aligned}$$