
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: Keine Abgabe

Aufgabe 1

Seien $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette M über den Zuständen $Q = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen von M .
2. Geben Sie die Menge aller transienten Zustände von M an.
3. Geben Sie die Übergangsmatrix einer zeithomogenen Markov-Kette B mit drei Zuständen s_1, s_2, s_3 an, so dass s_1 transient ist, s_2 absorbierend ist und s_3 rekurrent ist.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X_0, X_1, X_2, \dots seien unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $0 < p < 1$.

1. Zeigen Sie, dass es sich bei $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit $Y_t := \min\{X_1, \dots, X_t\}$ um eine Markov-Kette handelt. Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten?
2. Stellt $Z_t := \max\{X_1, \dots, X_t\}$ ebenfalls eine Markov-Kette dar? Begründung!

Aufgabe 3

Auf einem Zentralrechner treffen Jobs zur Bearbeitung ein. Hierbei unterscheiden wir rechenintensive und einfache Jobs. In jedem Schritt handelt es sich unabhängig von allen anderen Jobs mit Wahrscheinlichkeit p um einen rechenintensiven Job. Da der Server nicht ausreichend dimensioniert ist, stürzt das System ab, wenn zwei rechenintensive Jobs aufeinander folgen.

Wie viele Schritte vergehen bis zu diesem Moment im Mittel?

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer geeigneten Markov-Kette.

Aufgabe 4

Anton (A) und Bodo (B) spielen das folgende Spiel mit einem fairen Würfel.

Wenn A an der Reihe ist, würfelt er so lange mit einem der Würfel, bis er entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist B an der Reihe) oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl geworfen hat (dann ist das Spiel zu Ende und A hat gewonnen).

Ist B an der Reihe, so würfelt er einmal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so ist das Spiel zu Ende und B hat gewonnen. Ansonsten ist A wieder an der Reihe. A beginnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der A gewinnt. Wie lange dauert das Spiel im Mittel?