WS 2011/12

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/uebung/

18. Januar 2012

ZÜ XII

Übersicht:

1. Thema: Arbeitsblatt 3, Rekursionsgleichungen.
2. Vorbereitung: auf TA Blatt 12

1. Thema: Arbeitsblatt, Rekursionsgleichungen

1.1 Beispiele von Rekursionen

Erinnerung:

Lukaszahlen auf Übungsblatt 5, HA 2:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

1. Zeigen Sie mit direktem Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} .$$

2. Man zeige mit vollständiger Induktion, dass L_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist.

Schreibweise der Rekursion nach Vorlesung:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Die Rekursion kann als *induktive Definition* einer Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ dienen.

Die Rekursionsgleichung hat die folgenden Eigenschaften:

linear: multiplikative Koeffizienten
konstante Koeffizienten: 1,-1,-1
homogen: rechte Seite ist gleich 0
Ordnung 2: bis zum 2ten Indexvorgänger.

Anfangsbedingungen:

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 1\,.$$

Lösung der vollständigen Rekursionsgleichung:

$$f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq 0\,.$$

Unter der *vollständigen Rekursionsgleichung* versteht man die Rekursionsgleichung zusammen mit den Anfangsbedingungen (siehe Arbeitsblatt 3).

Beispiel

Fibonaccizahlen:

Rekursionsgleichung wie bei Lukaszahlen.
Anfangsbedingungen: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Lösung:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n , \quad \forall n \geq 0\,.$$

1.2 Arbeitsblatt 3: Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen linearen Rekursiongleichung der Ordnung d mit konstanten Koeffizienten q_i für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + \ \ldots \ + q_d \cdot f_n \ = \ 0\,, \quad \forall n \geq 0\,. \qquad (1)$$

Allgemeine Lösung

Eine Gleichung „allgemein Lösen“ heißt,
ein Verfahren anzugeben, mit dem man alle Lösungen darstellen kann.

Die Darstellungen enthalten dann in der Regel gewisse Parameter.

Zur allgemeinen Lösung der Gleichung (1)
stellen wir zunächst das charakteristische Polynom $q^R(z)$ auf
und bestimmen dessen Nullstellen.

$$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + \ldots + q_{d-1} z + q_d. \tag{2}$$

Die (i. A. komplexen) Nullstellen von $q^R(z)$ seien
α_i mit Vielfachheit d_i für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $\sum_{i=1}^{i=k} d_i = d$.

Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also k.

Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen,
so zählt man d Nullstellen.

Beispiel Lukaszahlen:

Charakteristisches Polynom: $q_R(z) = z^2 - z - 1\,.$

Koeffizienten $q_1 = -1$, $q_2 = -1$. Es gilt stets $q_0 = 1$.

$d = 2$.

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_{1/2} &= \frac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind verschieden, d.h. die Vielfachheiten sind $d_i = 1$.
Es gilt also $k = d$.

(Forts. Allgemeine Lösung)

Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann eine Lösung der Rekursion (1), wenn es Zahlen $c_{i,j}$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $j = 0, 1, \ldots, d_i - 1$ gibt, so dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \qquad \text{mit} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} p_i(n) &= \sum_{j=0}^{d_i-1} c_{i,j} \cdot n^j \qquad (4) \\ &= c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \ \ldots \ + c_{i,d_i-1} \cdot n^{d_i-1}. \end{aligned}$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung:

$$
\begin{aligned}
f_n &= p_1(n) \cdot \alpha_1^n + p_2(n) \cdot \alpha_2^n \\
&= (c_{1,0}) \cdot \alpha_1^n + (c_{2,0}) \cdot \alpha_2^n \\
&= c_{1,0} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{2,0} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .
\end{aligned}
$$

Spezielle Lösung

Für jeden Koeffizientenvektor $(c_{i,j})$ der Länge d erhält man mit Formel (3) eine *spezielle Lösung* der Rekursion (1).

Für beliebig vorgegebene Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ kann man die Parameter $c_{i,j}$ so wählen, dass die folgenden Gleichungen als sogenannte *Anfangsbedingungen* der Rekursionsgleichung erfüllt sind.

$$f_0 = a_0,\ f_1 = a_1,\ \ldots\ , f_{d-1} = a_{d-1}\,. \tag{5}$$

Beispiel Lukaszahlen:

Allgemeine Lösung

$$f_n \;=\; p_1(n)\cdot\alpha_1^n + p_2(n)\cdot\alpha_2^n\,.$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingungen: $f_0 = 2,\ f_1 = 1.$

Gleichungssystem für $n = 0$ und $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= c_{1,0}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{2,0}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\,, \\ 1 &= c_{1,0}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{2,0}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\,. \end{aligned}$$

Eindeutige Lösung: $c_{1,0} = 1,\ c_{2,0} = 1\,.$

Bemerkung:
Im Allgemeinen wird das Gleichungssystem mit Methoden der linearen Algebra gelöst.

Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die erzeugende Funktion $F(z)$ einer speziellen Lösung $(f_n)_{n\geq 0}$ der Rekursion (1) mit den Anfangsbedingungen (5) ist gleich der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{6}$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (2) reflektierten Polynom

$$q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ \ldots \ + q_d z^d \tag{7}$$

und einem Polynom $p(z)$, das sich aus dem Ansatz der *vollständigen Rekursion* ergibt.

Vollständige Rekursion

Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt die Gleichung (1) zusammen mit den Anfangsbedingungen (5) und ist wie folgt definiert.

Seien $f_n = 0$ für alle $n < 0$. Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion $\delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,i} = 1$ für alle i und $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$.

Dann lautet die vollständige Rekursionsgleichung für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned} & f_n + q_1 \cdot f_{n-1} + \ldots + q_d \cdot f_{n-d} \\ = \quad & e_0 \cdot \delta_{n,0} + e_1 \cdot \delta_{n,1} + \ldots + e_{d-1} \cdot \delta_{n,d-1} \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei sind die Parameter e_i mit den Anfangsbedingungen (5) durch die folgenden Gleichungen verknüpft.

$$\begin{array}{rcccl} f_0 & = & e_0 & = & a_0\,, \\ f_1 + q_1 \cdot f_0 & = & e_1 & = & a_1 + q_1 a_0\,, \\ f_2 + q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_0 & = & e_2 & = & a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0\,, \\ & \vdots & & \vdots & \\ f_{d-1} + \ldots + q_{d-1} \cdot f_0 & = & e_{d-1} & = & a_{d-1} + \ldots + q_{d-1} \cdot a_0\,. \end{array}$$

Das gesuchte Polynom $p(z)$ ist nun gegeben durch

$$p(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_{d-1} z^{d-1}. \tag{9}$$

Damit gilt für die erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_{d-1} z^{d-1}}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ \ldots\ + q_d z^d}\,.$$

Beispiel Lukaszahlen:

Berechnung der erzeugenden Funktion $F(z)$.

$$q(z) = 1 - z - z^2.$$

$$e_0 = 2,$$
$$e_1 = a_1 + q_1 a_0 = 1 - 1 \cdot 2 = -1.$$

Es folgt

$$p(z) = 2 - z.$$

Ergebnis:

$$F(z) = \frac{2-z}{1-z-z^2}$$

mit Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n \, .$$

2. Vorbereitung TA Blatt 12

2.1 VA 1

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{bzw.} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n .$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

Bemerkungen zur Definition erzeugender Funktionen!!!

1. Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = A(z) + B(z)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \; = \; A(z) + B(z)\,. \end{aligned}$$

Begründung: folgt aus der Definition der Addition im Ring der formalen Potenzreihen.

2. Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}\,. \\ &= \tfrac{1}{z}\,(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;-\; a_0) \;=\; \tfrac{1}{z}(A(z) - a_0)\,. \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

3. Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$C(z) = z \cdot A(z)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} \;=\; z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \;=\; z \cdot A(z)\,. \end{aligned}$$

Begründung: Operationen im Ring der formalen Potenzreihen.

4. Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n z^n \\ &= \tfrac{d}{dz}\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}\right) \;=\; \tfrac{d}{dz}\left(z \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right). \end{aligned}$$

Begründung: Definition Linearer Operator $\frac{d}{dz}$ im Ring der formalen Potenzreihen.

5. Mit Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} C(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \\ &= z \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = z \cdot \frac{d}{dz} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,. \end{aligned}$$

6. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = \frac{A(z)}{1-z}\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\tfrac{A(z)}{1-z} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \cdot 1 \cdot z^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n \;=\; C(z)\,.
\end{aligned}$$

7. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C(z) = A(z) \cdot B(z)\,.$$

Lösung:

Faltungsformel!

2.2 VA 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}\,.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Lösung:

Um $F(z)$ in eine Reihe entwickeln zu können, zerlegen wir F in Partialbrüche bezüglich der Nullstellen des Nenners $q(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6$.

Man findet sofort $\beta_1 = 1$ als eine Nullstelle.

Nun dividiert man r durch $z - 1$ und erhält

$$\begin{aligned} t(z) &= z^2 - z - 6 = (z-3)(z+2)\,, \\ q(z) &= (z-1)(z-3)(z+2)\,. \end{aligned}$$

Die Partialbruchentwicklung von F lautet

$$
\begin{aligned}
&\frac{z^2+3z-5}{(z-1)(z+2)(z-3)} \\
&\qquad = \quad \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-3} \\
&\qquad = \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-1} \;+\; \frac{-7}{15}\cdot\frac{1}{z+2} \;+\; \frac{13}{10}\cdot\frac{1}{z-3}\,.
\end{aligned}
$$

Wir formen zunächst so um, dass die Entwicklung in geometrische Reihen abgelesen werden kann,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{z^2+3z-5}{(z-1)(z+2)(z-3)} \\
&\quad = \; -\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{1-z} \; - \; \tfrac{7}{30} \cdot \tfrac{1}{1-(-\frac{z}{2})} \; + \; \tfrac{13}{30} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{z}{3}} \, . \\
&\quad = \; -\tfrac{1}{6} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \; - \; \tfrac{7}{30} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{z}{2}\right)^n \; - \; \tfrac{13}{30} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{z}{3}\right)^n \\
&\quad = \; \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{5}{30} - \tfrac{7}{30}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - \tfrac{13}{30}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right) \cdot z^n
\end{aligned}$$

und erhalten für alle $n \geq 0$

$$a_n = -\frac{1}{30}\left(5 + 7\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 13\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) .$$

Preisfrage: Wo liest man die Rekursionsgleichung ab?

2.3 VA 3

Siehe Arbeitsblatt 3 und Tutorübungen und