

Lemma 176

Es gibt

$$\sum_{k=1}^n P_{n,k}$$

verschiedene Typen von Permutationen in S_n .

Beweis:

Klar. □

Lemma 177

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in S_n vom Typ $1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}$ (Beachte: $0! = 1$).
Insbesondere gilt:

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum b_i = k \\ \sum i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum_{i=1}^n i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}.$$

Beweis:

Sei Typ $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\quad)(\quad)\dots(\quad)}^{b_1} \overbrace{(\quad)(\quad)\dots(\quad)}^{b_2} \dots \overbrace{(\quad\dots\quad)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n .
Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten.

Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i -mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor **überzählt** werden. □

Beispiel 178

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

4.7 Abzählkoeffizienten

4.7.1 Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \quad \forall n \geq k > 0$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \forall n > 0$$

2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n \geq k > 0$$

3

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n \geq k > 0$$

Weiter definiert man:

1

$$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \quad \forall n \in \mathbb{C}$$

2

$$\binom{0}{0} := 1$$

3

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+k-1) \quad \forall x \in \mathbb{C}, k \geq 0 \end{aligned}$$

4

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 179

$\binom{x}{k}$ ist, für $k \geq 0$, ein Polynom in x vom Grad k , und es gilt auch für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{C}$

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Beweis:

Da für $k \leq 0$ per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur $k > 0$. Es ist dann

$$\binom{x}{k} - \left[\binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k} \right]$$

ein Polynom in x vom Grad $\leq k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (Fundamentalsatz der Algebra (Satz 139)).

Beweis (Forts.):

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned}x^k &= x \cdot (x - 1)^{k-1} = (k + x - k)(x - 1)^{k-1} \\ &= k \cdot (x - 1)^{k-1} + (x - k)(x - 1)^{k-1} \\ &= k \cdot (x - 1)^{k-1} + (x - 1)^k\end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} = \frac{(x - 1)^{k-1}}{(k - 1)!} + \frac{(x - 1)^k}{k!} = \binom{x - 1}{k - 1} + \binom{x - 1}{k}.$$



Das Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

benannt nach **Blaise Pascal** (1623–1662).

Beobachtung:

Die Zeilensumme in der n -ten Zeile ist 2^n .

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Lemma 180

Für die Spaltensumme bis zur n -ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n, k \geq 0$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über n)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^0 \binom{m}{k} &= \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=0}^n \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}\end{aligned}$$



Beispiel 181

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$k = 2, n = 5 :$$

$$\sum_{m=0}^5 \binom{m}{2} = \binom{6}{3}$$

Lemma 182

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{C}$$

Beweis:

(Vollständige Induktion über m)

Induktionsanfang: $m = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \binom{n+k}{k} &= \binom{n}{0} = 1 \\ &\stackrel{!}{=} \binom{0+n+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss $m \mapsto m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} + \binom{m+n+1}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} \\ &= \binom{m+n+2}{m+1}\end{aligned}$$



Beispiel 183

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$m = 3, n = 2 :$

$$\sum_{k=0}^3 \binom{2+k}{k} = \binom{6}{3}$$

Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^k = (-1)^k \cdot x^k$$

- Binomialsatz

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Spezialfälle des Binomialsatzes:

1 $x = y = 1$:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

2 $y = 1$:

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$$

3 $x = -1, y = 1$ ($n = 0$ klar; sei also $n > 0$):

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$
$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Satz 184 (Vandermonde-Identität)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \cdot \binom{y}{n-k} \quad n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$$

Beweis:

Seien zunächst $x, y \in \mathbb{N}$.

Zur Verdeutlichung sei z. B. x die Anzahl der Wahlmänner der Demokraten und y die Anzahl der Wahlmänner der Republikaner. $\binom{x+y}{n}$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, aus $(x+y)$ Wahlmännern n auszuwählen. Dementsprechend ist $\binom{x}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus x Demokraten k auszuwählen, und $\binom{y}{n-k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus y Republikanern $(n-k)$ auszuwählen.

Damit überlegt man sich leicht, dass die Formel für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis (Forts.):

Erweiterung auf $x, y \in \mathbb{C}$: Setze $y = \text{const.}$ Damit stehen links und rechts ein Polynom n -ten Grades in x :

$$p_l(x) \stackrel{!}{=} p_r(x)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$p_l(x) - p_r(x) = 0$$

Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist dann

$$p_l(x) - p_r(x) \equiv 0$$

Das heißt, $p_l(x)$ und $p_r(x)$ sind identisch. □

4.7.2 Stirling-Zahlen der ersten Art

Lemma 185

Mit den zusätzlichen Festlegungen

$$s_{0,0} = 1$$

und

$$s_{n,k} = 0 \quad k \leq 0, n > 0$$

gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad \forall n, k > 0.$$

Beweis:

Für Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ mit k Zyklen gilt:

Entweder: n bildet einen Zyklus der Länge 1:

$$\pi = \underbrace{(* \cdots *) (* \cdots *) \dots (n)}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{mit } (k-1) \text{ Zyklen}}}$$

Dafür gibt es $s_{n-1, k-1}$ Möglichkeiten.

Beweis (Forts.):

Oder: n ist in einem Zyklus der Länge ≥ 2 enthalten.

Streiche n aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*\downarrow \dots *\downarrow)(*\downarrow \dots *\downarrow) \dots (*\downarrow \dots *\downarrow)}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die \downarrow bezeichnen Stellen, an denen n gestrichen worden sein könnte (immer hinter der jeweiligen Zahl, da $(\downarrow * \dots *)$ zyklisch mit $(* \dots *\downarrow)$ identisch ist). Dafür gibt es $n - 1$ mögliche Stellen.

Damit ergeben sich hier $(n - 1)s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.

Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. □

Stirling-Dreieck der ersten Art

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad \forall n, k > 0$$