Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 7
1. Juni 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 8. Juni 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sprache $L_k = \{(ab^k)^m \,;\, m \in \mathbb{N}\}$.
(Beispiel: $L_2 = \{(abb)^m \,;\, m \in \mathbb{N}\}$)

1. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ durch Angabe einer rechtslinearen Grammatik für L_k, dass L_k regulär ist.
2. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ nicht kontextfrei ist.
   Hinweis: Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L. Man betrachte $(ab^n)^3$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Die zwei Operationen Spiegelung (w^R) und Negation ($\overline{w}$) seien für $w \in \Sigma^*$ wie folgt definiert:

$$w^R = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ u^R a, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

$$\overline{w} = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ \hat{a}\overline{u}, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Dabei setzen wir $\hat{0} = 1$ und $\hat{1} = 0$. Wie man leicht (etwa per Induktion) zeigen kann, gelten für diese Operationen auch die Gleichungen $(ua)^R = au^R$ und $\overline{ua} = \overline{u}\hat{a}$ für alle $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$. Im Folgenden nehmen wir diese Identitäten als bewiesen an.
Wir betrachten nun die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \,;\, w^R = \overline{w}\}$ und die Grammatik

$$G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to 0S1 \mid 1S0 \mid \epsilon\}, S).$$

Zeigen Sie: L ist genau die von der Grammatik G beschriebene Sprache.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lll} S \to AZ\,, & X \to b \mid XB\,, & B \to b\,, \\ Z \to SD \mid TD\,, & Y \to c \mid YC\,, & C \to c\,, \\ T \to XY\,, & A \to a\,, & D \to d\,. \end{array}$$

1. Zeigen Sie durch Anwendung des CYK-Verfahrens, dass a^2bc^2d nicht in der von G erzeugten Sprache enthalten ist, d. h. $a^2bc^2d \notin L(G)$.

2. Geben Sie eine Ableitung des Wortes a^2bcd^2 mit Produktionen der Grammatik G an.

3. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^k b^m c^k d^m\,;\, k, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ <u>nicht</u> kontextfrei ist.

4. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^m b^m c^k d^k\,;\, k, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ kontextfrei ist. Ist L linear, d.h., kann sie von einer Grammatik mit linearen Produktionen erzeugt werden?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $\Sigma \neq \emptyset$ und $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ Zeichenmengen mit $n \geq 2$ und m eine *Markierungsabbildung* der Form $m(x) = \hat{x}$ bzw. $m(A) = \widehat{A}$ für alle $x \in \Sigma$ bzw. $A \in V$. Wir definieren $\widehat{\Sigma} = \{\hat{x}\,;\, x \in \Sigma\}$ und $\widehat{V} = \{\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n\}$. Wir setzen Mengendisjunktheit voraus, so dass $|\Sigma \cup \widehat{\Sigma} \cup V \cup \widehat{V}| = 2(n + |\Sigma|)$ gilt, und definieren $\Sigma' = \Sigma \cup \widehat{\Sigma}$ und $V' = V \cup \widehat{V}$.

Wir sagen, dass eine kontextfreie Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ eine *Wortendemarkierung* generiert, falls S' eines der markierten Zeichen $\widehat{A}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ist und jede Produktion aus P' eine der folgenden Formen besitzt (mit $x \in \Sigma$):

$$\begin{array}{rclcrcl} A_i & \to & A_j A_k\,, & \qquad & A_i & \to & x\,, \\ \widehat{A}_i & \to & A_j \widehat{A}_k\,, & \qquad & \widehat{A}_i & \to & \hat{x}\,. \end{array}$$

1. Sei G' eine kontextfreie Grammatik, die eine Wortendemarkierung generiert. Man zeige mit <u>struktureller Induktion</u> für alle Wörter w der Sprache $L(G')$ die folgende Eigenschaft

   $$\widehat{P}(w): \quad \text{Es gibt ein } v \in \Sigma^* \text{ und ein } \hat{x} \in \widehat{\Sigma}, \text{ so dass } \; w = v\hat{x} \; \text{ gilt.}$$

   Betrachten Sie dazu geeignete Eigenschaften $P(w)$ bzw. $\widehat{P}(w)$ der aus Variablen $A \in V$ einerseits bzw. $\widehat{A} \in \widehat{V}$ andererseits ableitbaren Wörter $w \in \Sigma'^*$. Verwenden Sie die Bezeichnung $L(X) = \{w \in \Sigma'^*\,;\, X \underset{G'}{\to}^* w\}$ für $X \in V'$.

2. Seien L eine kontextfreie Sprache, so dass $\epsilon \notin L$, und $E = \{x \in \Sigma^*\,;\, |x| = 1\}$.

   Zeigen Sie, dass der Rechtsquotient L/E kontextfrei ist. Zum Nachweis genügt eine informelle Konstruktionsbeschreibung einer kontextfreien Grammatik für L/E.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Überführen Sie die folgende Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, \{S \to XX, S \to a, X \to SS, X \to b\}, X)\,.$$

Vorbereitung 2

Sei $K = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, F, \delta)$ ein Kellerautomat mit Startzustand $q_0 \in Q$, Startkellerzeichen $Z_0 \in \Delta$, Menge $F \subseteq Q$ von akzeptierenden Zuständen und der Übergangsfunktion δ. Eine Folge $(p_0, w_0, \gamma_0), (p_1, w_1, \gamma_1), \ldots, (p_k, w_k, \gamma_k)$ mit nicht leerem γ_0 heiße Berechnung der Konfiguration (p_0, w_0, γ_0) mit $k \in \mathbb{N}_0$ Schritten, falls gilt

$$(p_0, w_0, \gamma_0) \to (p_1, w_1, \gamma_1) \to \ \ldots \ \to (p_k, w_k, \gamma_k)\,.$$

Falls für $c = (p, w, \gamma)$ keine Berechnung mit $k > 0$ Schritten existiert, dann nennen wir c eine Endkonfiguration

Wir nehmen nun an, dass K ein deterministischer Kellerautomat in Normalform ist. Man zeige:

1. Für alle $w \in \Sigma^*$ gibt es genau eine Berechnung $(q_0, w, Z_0), (p_1, w_1, \gamma_1), \ldots, (p_k, \epsilon, \gamma_k)$, so dass $(p_k, \epsilon, \gamma_k)$ eine Endkonfiguration ist. Für diese Berechnung gilt $\gamma_i \neq \lambda$ mit leerem Wort $\lambda \in \Delta^*$.

2. Es gibt eindeutige Funktionen $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$, $\eta : \Sigma^* \to Q$ und $\kappa : \Sigma^* \to \Delta^+$, so dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

   $(\eta(w), \epsilon, \kappa(w))$ ist Endkonfiguration einer Berechnung von (q_0, w, Z_0) mit $\sigma(w)$ Schritten.

Vorbereitung 3

Man beweise die folgende Aussage:

Für alle deterministischen kontextfreien Sprachen L gilt, dass es genau dann einen deterministischen Kellerautomaten gibt, der L mit leerem Keller akzeptiert, wenn L die Präfixbedingung erfüllt.

Tutoraufgabe 1

Kellerautomaten in ihrer einfachsten Form haben nur einen einzigen Zustand und akzeptieren mit leerem Keller. Man kann in diesem Fall auf Zustände sogar ganz verzichten. Sie haben auch keine sogenannten ϵ-Übergänge. Wir bezeichnen solche Kellerautomaten als einfache Kellerautomaten $E = (\Sigma, \Delta, Z_0, \delta)$, abgekürzt EKA. Entsprechend ist die Funktionalität von δ nun $\delta : \Sigma \times \Delta \to \mathcal{P}_f(\Delta^*)$, wobei $\mathcal{P}_f(\Delta^*)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von Δ^* bedeutet.

1. Zeigen Sie durch Anwendung bzw. Modifikation von Sätzen der Vorlesung, dass es für jede kontextfreie Sprache L mit $\epsilon \notin L$ einen einfachen Kellerautomaten $E = (\Sigma, \Delta, Z_0, \delta)$ gibt, der die Sprache L akzeptiert, d.h. $L = L(E)$.

2. Ein EKA E ist deterministisch, falls $|\delta(a, Z)| \leq 1$ für alle $a \in \Sigma, Z \in \Delta$ gilt.

   Zeigen Sie, dass $L = \{a^n b^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ von einem deterministischen EKA erzeugt werden kann.

Tutoraufgabe 2

Sei $A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein deterministischer Kellerautomat. Dann nennen wir einen Zustand $q \in Q$ spontan bzw. stabil, wenn $|\delta(q, a, X)| = 0$ für alle $a \in \Sigma, X \in \Delta$ gilt bzw. $|\delta(q, \epsilon, X)| = 0$ für alle $X \in \Delta$ gilt. Die Mengen der spontanen bzw. stabilen Zustände bezeichnen wir mit Q_{sp} bzw. Q_{st}. A nennen wir ϵ-separiert, falls $Q = Q_{sp} \cup Q_{st}$ gilt.

Nach Konstruktion in der Vorlesung gibt es zu A einen äquivalenten ϵ-separierten Kellerautomaten $K = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ in Normalform. Man beweise nun unter Berücksichtigung der Definitionen in VA 2 die folgenden Aussagen über Kellerautomaten K in Normalform.

1. Sei $\beta = (q_0, w, Z_0), (q_1, w_1, \gamma_1) \;\ldots\; (q_{n-1}, w_{n-1}, \gamma_{n-1}), (\eta(w), \epsilon, \kappa(w))$ eine Berechnung von (q_0, w, Z_0) und j die kleinste Zahl, so dass die Teilsequenz $\beta_j = (q_j, w_j, \gamma_j) \;\ldots\; (q_{n-1}, w_{n-1}, \gamma_{n-1}), (\eta(w), \epsilon, \kappa(w))$ von β nur spontane Zustände enthält mit Ausnahme von $\eta(w)$. Dann gilt:

   w wird von K akzeptiert genau dann, wenn mindestens einer der in β enthaltenen Zustände q_i ein akzeptierender Zustand aus F ist.

2. Zu jedem ϵ-separierter Kellerautomaten in Normalform K gibt es einen äquivalenten Kellerautomaten $K' = (Q', \Sigma, \Delta', q'_0, Z'_0, \delta', F')$, der keine spontanen akzeptierenden Zustände besitzt, d.h., dass alle akzeptierenden Zustände stabil sind.

3. K' ist in dem folgenden Sinn komplementierbar: Der komplementierte Kellerautomat $\overline{K} = (Q', \Sigma, \Delta', q'_0, Z'_0, \delta', {Q'}_{st} \setminus F')$ akzeptiert das Komplement von $L(K')$:

$$L(\overline{K}) = \overline{L(K')} = \Sigma^* \setminus L(K')\,.$$

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow E\,, \\ E &\rightarrow E + T \mid T\,. \\ T &\rightarrow a \mid (E)\,. \end{aligned}$$

Ist G eine $LR(1)$ Grammatik? Begründen Sie Ihre Antwort.