Approximation unabhängiger Mengen mit der ϑ-Funktion

Matthias Baumgart
matthias.baumgart@informatik.tu-chemnitz.de

Chemnitz, 16. Juni 2004

Gliederung

1. Einleitung
2. Die Lovász ϑ-Zahl
3. Der Algorithmus von Alon und Kahale
4. Zusammenfassung

Einleitung

Karger, Motwani und Sudan veröffentlichten einen Färbungsalgorithmus, der einen sogenannten vektor-k-färbbaren Graphen mit $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$ Farben färbt.

Einleitung

Karger, Motwani und Sudan veröffentlichten einen Färbungsalgorithmus, der einen sogenannten vektor-k-färbbaren Graphen mit $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$ Farben färbt.

Idee ist nun:

Wenn wir einen Graphen mit $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$ Farben färben, dann enthält die größte Farbklasse mindestens $\tilde{\Omega}(n^{3/(k+1)})$ Knoten.

Voraussetzung: Graph ist vektor-k-färbbar.

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \qquad k \geq 3 \; ,$$

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \qquad k \geq 3 \ ,$$

dann gibt es m Knoten die vektor-k-färbbar sind.

In diesem Fall kann eine unabhängige Menge der Größe

$$\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$$

gefunden werden.

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \qquad k \geq 3 \; ,$$

dann gibt es m Knoten die vektor-k-färbbar sind.

In diesem Fall kann eine unabhängige Menge der Größe

$$\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$$

gefunden werden.

Ergebnis von Boppana und Halldórsson bestimmt unabhängige Menge der Größe

$$\Omega(m^{1/(k-1)}) \; .$$

Die Lovász ϑ-Zahl

Definition 1 *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Eine Zuweisung eines Einheitsvektors* $a_v \in \mathbb{R}^k$ *für jeden Knoten* $v \in V$ *heißt orthonormale Repräsentation von* G*, falls für alle* $\{v, w\} \notin E$ *die Vektoren* a_v *und* a_w *orthogonal zueinander sind, das heißt es gilt* $a_v^T a_w = 0$*.*

Die Lovász ϑ-Zahl

Definition 1 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Zuweisung eines Einheitsvektors $a_v \in \mathbb{R}^k$ für jeden Knoten $v \in V$ heißt orthonormale Repräsentation von G, falls für alle $\{v, w\} \notin E$ die Vektoren a_v und a_w orthogonal zueinander sind, das heißt es gilt $a_v^T a_w = 0$.*

Definition 2 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist die Lovász $\vartheta(G)$-Zahl des Graphen G das Minimum über alle Einheitsvektoren d und alle orthonormalen Repräsentationen (a_v) von G von*

$$\max_{v \in V} \frac{1}{(d^T a_v)^2} \, .$$

Es gilt stets

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

beziehungsweise

$$\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G) \; .$$

Es gilt stets

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

beziehungsweise

$$\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G) \ .$$

Fakt 3 *Die Lovász $\vartheta(G)$-Zahl eines Graphen $G = (V, E)$ hat folgende äquivalente Beschreibungen:*

1. *Es sei (b_v) eine orthonormale Repräsentation des Graphen $\overline{G}$ und d ein Einheitsvektor. Dann gilt*

$$\vartheta(G) = \max_{\{d,(b_v)\}} \sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2 \ .$$

2. *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt für die Lovász $\vartheta(G)$-Zahl*

$$\vartheta(G) = \max_B \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ ,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist für die gilt

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 1$$

und

$$b_{ij} = 0$$

für alle Kanten $\{i, j\} \in E$ des Graphen G.

Satz 4 *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Dann gilt*

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \ .$$

Satz 4 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt*

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \ .$$

Beweis:

- sei I eine beliebige maximale unabhängige Menge in G
- setze $b_v := e$ für alle Knoten $v \in I$
- konstruiere Einheitsvektor f mit $e^T f = 0$
- setze $b_v := f$ für alle Knoten $v \in V \setminus I$
- (b_v) ist orthonormale Repräsentation von $\overline{G}$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\alpha(G) &= |I| \\
&= \underbrace{\sum_{v\in I}(e^T e)^2}_{=|I|} + \underbrace{\sum_{v\notin I}(e^T f)^2}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(e^T b_v)^2 \\
&\le \max_{\{e,(b_v)\}} \sum_{i=1}^{n}(e^T b_i)^2 \\
&= \vartheta(G)\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Der Algorithmus von Alon und Kahale

Der Algorithmus von Alon und Kahale beruht auf einem Färbungsalgorithmus von Karger, Motwani und Sudan.

Der Algorithmus von Alon und Kahale

Der Algorithmus von Alon und Kahale beruht auf einem Färbungsalgorithmus von Karger, Motwani und Sudan.

Definition 5 *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Die vektorchromatische Zahl* $\chi_v(G)$ *des Graphen* G *ist die kleinste reelle Zahl* h, *so dass es eine Belegung der Knoten* $v \in V$ *mit Einheitsvektoren* a_v *gibt, so dass für jede Kante* $\{v, w\} \in E$ *gilt*

$$a_v^T a_w \leq -\frac{1}{h-1}\,.$$

Die kleinste reelle Zahl h, so dass es eine Belegung der Knoten $v \in V$ mit Einheitsvektoren a_v gibt, so dass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ gilt

$$a_v^T a_w = -\frac{1}{h-1}$$

nennen wir strenge vektorchromatische Zahl $\chi_{sv}(G)$ des Graphen G

Die kleinste reelle Zahl h, so dass es eine Belegung der Knoten $v \in V$ mit Einheitsvektoren a_v gibt, so dass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ gilt

$$a_v^T a_w = -\frac{1}{h-1}$$

nennen wir strenge vektorchromatische Zahl $\chi_{sv}(G)$ des Graphen G

Fakt 6 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Gilt für die vektorchromatische Zahl $\chi_v(G) \leq h$, wobei h eine feste ganze Zahl mit $h \geq 3$ ist, dann kann G von einem randomisierten Polynomialzeitalgorithmus mit $\tilde{O}(n^{1-3/(h+1)})$ Farben gefärbt werden.*

Fakt 7 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die strenge vektorchromatische Zahl des Graphen G ist gleich der Lovász $\vartheta(\overline{G})$-Zahl.*

Satz 8 *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Falls* $\vartheta(G) \geq n/k + m$ *gilt, wobei* k *eine feste ganze Zahl mit* $k \geq 3$ *ist, kann eine unabhängige Menge der Größe* $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$ *von einem randomisierten Polynomialzeitalgorithmus gefunden werden.*

Satz 8 *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Falls* $\vartheta(G) \geq n/k + m$ *gilt, wobei* k *eine feste ganze Zahl mit* $k \geq 3$ *ist, kann eine unabhängige Menge der Größe* $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$ *von einem randomisierten Polynomialzeitalgorithmus gefunden werden.*

Beweis:

- sei d ein Einheitsvektor und (b_v) eine orthonormale Repräsentation von $\overline{G}$ mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2$$

- sortiere Knoten, so dass gilt

$$(d^T b_1)^2 \geq (d^T b_2)^2 \geq \ldots \geq (d^T b_n)^2$$

- wegen

$$(d^T b_1)^2 + (d^T b_2)^2 + \ldots + (d^T b_n)^2 \geq \frac{n}{k} + m \quad \text{und} \quad (d^T b_v)^2 \leq 1$$

gilt

$$(d^T b_m)^2 \geq \frac{1}{k}$$

- wegen

$$(d^T b_1)^2 + (d^T b_2)^2 + \ldots + (d^T b_n)^2 \geq \frac{n}{k} + m \quad \text{und} \quad (d^T b_v)^2 \leq 1$$

gilt

$$(d^T b_m)^2 \geq \frac{1}{k}$$

- betrachte nun nur noch die ersten m Knoten $V' = \{1, \ldots, m\}$
- es sei K der auf V' induzierte Untergraph von G
- die Vektoren $(b_{v'})$ mit $v' \in V'$ bilden eine orthonormale Repräsentation des Graphen $\overline{K}$

- es gilt

$$\max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

und damit

$$\vartheta(\overline{K}) = \min_{\{d,(b_{v'})\}} \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

- es gilt

$$\max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

und damit

$$\vartheta(\overline{K}) = \min_{\{d,(b_{v'})\}} \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

- folglich gilt außerdem

$$\chi_v(K) \leq \chi_{sv}(K) = \vartheta(\overline{K}) \leq k$$

- demnach kann K mit $\tilde{O}(m^{1-3/(k+1)})$ Farben gefärbt werden und die größte Farbenklasse bildet eine unabhängige Menge der Größe $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$

Wie findet man nun einen Einheitsvektor d und eine orthonormale Repräsentation (b_v) des Graphen $\overline{G}$ mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2 \ ?$$

Wie findet man nun einen Einheitsvektor d und eine orthonormale Repräsentation (b_v) des Graphen $\overline{G}$ mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2 \; ?$$

Es reicht sogar, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2 \geq \vartheta(G) - 1 \; .$$

Für die Lovász $\vartheta(G)$-Zahl des Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\vartheta(G) = \max_B \mathrm{Tr}\,(BJ)\ ,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, B &= 1 \\ b_{ij} &= 0 \qquad \text{für alle Kanten } \{i, j\} \in E. \end{aligned}$$

Für die Lovász $\vartheta(G)$-Zahl des Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\vartheta(G) = \max_B \mathrm{Tr}\,(BJ)\;,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Tr}\,B & = & 1 & \\ b_{ij} & = & 0 & \quad\text{für alle Kanten } \{i,j\} \in E. \end{array}$$

Eine Matrix B mit $\mathrm{Tr}\,(BJ) \geq \vartheta - 1$ kann in Polynomialzeit mit der Ellipsoidmethode oder mit Innere-Punkte-Verfahren gefunden werden.

Da B symmetrisch positiv semidefinit ist, gibt es eine Matrix C mit

$$B = CC^T \ .$$

Die Matrix C kann mit der Cholesky Zerlegung bestimmt werden.

Insbesondere gilt

$$b_{ij} = c_i^T c_j \ .$$

Da B symmetrisch positiv semidefinit ist, gibt es eine Matrix C mit

$$B = CC^T \ .$$

Die Matrix C kann mit der Cholesky Zerlegung bestimmt werden.

Insbesondere gilt

$$b_{ij} = c_i^T c_j \ .$$

Setze

$$b_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$$

und

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{\|\sum_{i=1}^n c_i\|} \ .$$

(b_v) ist eine orthonormale Repräsentation des Graphen $\overline{G}$.

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 \geq \vartheta(G) - 1\ .$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 \geq \vartheta(G) - 1\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2 &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (d^T b_i)^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \|c_i\| \cdot (d^T b_i)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} d^T c_i\right)^2 = \left(d^T \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 \geq \vartheta(G) - 1\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Zusammenfassung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit $\alpha(G) \geq n/k + m$ und $k \geq 3$.

Zusammenfassung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit $\alpha(G) \geq n/k + m$ und $k \geq 3$.

1. berechne orthonormale Repräsentation des Graphen $\overline{G}$ (mittels Theta-Funktion)

2. sortiere Knoten absteigend entsprechend der Werte $(d^T b_i)^2$ mit $i \in V$

3. wende Algorithmus von Karger et.al. auf den induzierten Untergraphen der ersten m Knoten an

4. gib größte Farbklasse aus